Задание по математике (письменно) Двухтуровой олимпиады ВМиК (апрель 2000 г)

1. Решить неравенство $\left\| x^2 - 8x + 2 \right| - x^2 \right| \ge 2x + 2.$
2. Решить уравнение $12^x + 6^x - 2 \cdot 4^x - 2 \cdot 3^x - 2^{x+1} + 4 = 0.$
3. Найти все решения неравенства $\sqrt{6 - 10\cos x - \sin x} < \sin x - \cos x,$ принадлежащие отрезку $[-\pi, \pi]$.
4. На стороне AB треугольника ABC выбрана точка D так, что $CD = \sqrt{13}$ и $\sin \angle ACD : \sin \angle BCD = 4 : 3$. Через середину отрезка CD проведена прямая, пересекающая стороны AC и BC в точках M и N соответственно. Известно, что $\angle ACB = 120^\circ$, площадь треугольника MCN равна $3\sqrt{3}$, а расстояние от точки M до прямой AB в два раза больше расстояния от точки N до этой же прямой. Найти площадь треугольника ABC.
5. Для каждого значения параметра a найти все решения системы уравнений
$$\begin{cases} y^2 - 3y\log_2\left(4x^2 + (14a - 10)x + 8a - 8\right) + \\ + 2\log_4^2\left(4x^2 + (6 - 2a)x + 4a^2 - 8a + 4\right)^2 = 0, \\ 5y^2 - 8y\log_4\left(4x^2 + (6 - 2a)x + 4a^2 - 8a + 4\right)^2 + \\ + 3\log_2^2\left(4x^2 + (14a - 10)x + 8a - 8\right) = 0. \end{cases}$$
6. В основании пирамиды SABC лежит треугольник ABC, у которого $AB = 15\sqrt{2}$, $BC = 20$, а радиус окружности, описанной около этого треугольника, равен $5\sqrt{5}$. На сторонах треугольника ABC как на диаметрах построены три сферы, пересекающиеся в точке O. Точка O является центром четвертой сферы, причем вершина пирамиды S является точкой касания этой сферы с некоторой плоскостью, параллельной плоскости основания ABC. Площадь части четвертой сферы, которая заключена внутри трехгранного угла, образованного лучами OA, OB и OC, равна 8π. Найти объем пирамиды SABC.

Ответы: 1. $x \in (-\infty, 0] \cup [1, 2] \cup [5, +\infty).$ 2. $x = 0, x = \log_3 2.$ 3. $x \in \left[2\operatorname{arctg}\dfrac{1 + \sqrt{65}}{16}, \dfrac{\pi}{3}\right].$ 4. $\dfrac{27\sqrt{3}}{2}.$ 5.

$$a \in \left(-\infty, \frac{1}{3}\right) \cup \left(\frac{7}{5}, +\infty\right) \Rightarrow x = \frac{a - 3}{4}, y = \log_2\left(15a^2 - 26a + 7\right) - 2; \quad a \in \left(\frac{1}{3}, 1\right) \Rightarrow x = -\frac{a + 1}{2},$$

$$y = 1 + \log_2\left(4a - 3a^2 - 1\right), \quad a \in \left(1; \frac{7}{5}\right) \Rightarrow x = 1 - a, y = 1 + \log_2\left(12a - 5a^2 - 7\right), \quad a = 1 \Rightarrow x = b,$$

$$y = \log_2\left(4b^2 + (14a - 10)b + 8a - 8\right), \; b \in (-\infty, -1) \cup (0, +\infty); \; a = \frac{1}{3}, \frac{7}{5} \Rightarrow$$ решений нет.

6. $50\left(5\sqrt{2} \pm 4\right)$