Задание письменного тура Двухтуровой олимпиады факультета ВМиК МГУ по математике 1999 года

1. Пункты A,B,C и D расположены на одной прямой в указанной последовательности. Пешеход выходит из пункта A со скоростью 5 км/час и направляется в пункт D. Достигнув пункта D, он поворачивает обратно и доходит до пункта B, затратив на всю дорогу 5 час. Известно, что расстояние между A и C он прошел за 3 часа, а расстояния между A и B, B и C, C и D (в заданном порядке) образуют геометрическую прогрессию. Найти расстояние между B и C.
2. Решить неравенство:
$$\left(x+\frac{8}{x}\right)\cdot\left|\log_{\frac{2x-3}{2}}(x^2-4x+4)\right|\geq 9\cdot\left|\log_{\frac{2x-3}{2}}(x^2-4x+4)\right|$$
3. Решить уравнение: $$\sqrt{\frac{1+\sin(2x-\frac{\pi}{3})}{8}}=-\sin x\cdot\cos x$$
4. На стороне BC треугольника ABC взята точка D такая, что $\angle$ CAD=2$\angle$ DAB. Радиусы окружностей, вписанных в треугольники ADC и ADB, равны соответственно 8 и 4, а расстояние между точками касания этих окружностей с прямой BC равно $\sqrt{129}$. Найти AD.
5. При каких значениях параметра a уравнение $$3^{x^2+2ax+4a-3}-2=\left|\frac{a-2}{x+a}\right|$$ имеет ровно два корня, лежащих на отрезке [-4,0] ?
6. В прямоугольном параллелепипеде ABCDA1B1C1D1 (ABCD и A1B1C1D1 - основания, AA1||BB1||CC1||DD1) отрезки M1N1, M2N2, M3N3 - общие перпендикуляры к парам отрезков A1C1 и AB1, BC1 и AC, DC1 и AD1 соответственно. Объем параллелепипеда равен V, радиус описанной сферы равен R, а сумма длин ребер AA1, AB и AD равна m. Найти сумму объемов пирамид AA1M1N1, ABM2N2 и ADM3N3