Вариант А1

1. Найти касательную к кривой, заданной уравнением

$\sin(xy) + x^2 - 2xy - 4 = 0$ в точке $(2;\, 0)$.

2. В трехмерном пространстве задана прямоугольная система координат. Найти ортогональную проекцию точки $A = (-1, -2, -1)$ на плоскость, определяемую уравнением

$3x - 5y + 4z = 5$.

3. Дана машина Тьюринга, на вход которой подаются любые цепочки из $(x|y)^*$. $Halt$ – состояние останова, q_0 – начальное состояние. L, R и N – сдвиг каретки (влево, вправо, на месте). Λ – «содержимое» пустой ячейки. Вначале на ленте записана лишь входная цепочка. Каретка стоит напротив её начала. В состоянии останова на ленте записана лишь цепочка-результат. Каретка также стоит напротив её начала.

	y	x	Λ
q_0	$\Lambda\, q_1\, R$	$\Lambda\, q_2\, R$	$x\, Halt\, N$
q_1	$\Lambda\, q_0\, R$	$\Lambda\, q_1\, R$	$y\, Halt\, N$
q_2	$\Lambda\, q_1\, R$	$\Lambda\, q_0\, R$	$\Lambda\, q_0\, N$

Правила заданы таблицей. Здесь, например, последняя ячейка таблицы определяет правило $\Lambda\, q_2 \;\to\; \Lambda\, q_0\, N$. В записи алгоритма Маркова используйте `->` для нетерминальной подстановки и `=>` для терминальной подстановки.

Требуется: а) описать работу данной машины на всех входных цепочках из $(x|y)^*$; б) выписать нормальный алгоритм Маркова в алфавите $\{x, y\}$, который эквивалентен данной машине на всех входных цепочках из $(x|y)^*$ и состоит из менее чем восьми правил.

4. Вычислить значение выражения $\beta \cdot y(\alpha) + \gamma$, где $y(x)$ – решение задачи Коши

$$y' - 3\,\frac{y}{x} = x,\; y(3) = -9; \quad \alpha = 6,\; \beta = -1,\; \gamma = 5.$$

5. Построить схему сложности не выше трех в базисе $\{\&, \vee, \neg\}$ для функции, заданной вектор-столбцом $f(x_1, x_2, x_3) = (11010101)$.

6. Случайная величина ξ имеет равномерное распределение на отрезке [-1,1]. Пусть $\eta = |\xi| + 2$. Найти функцию распределения и плотность распределения случайной величины η.

7. Выписать погрешность аппроксимации метода Рунге-Кутта и определить ее порядок

$$\frac{y_{n+1} - y_n}{\tau} = \frac{2}{3} f(t_n, y_n) + \frac{1}{3} f\left(t_n + \frac{3\tau}{2}, y_n + \frac{3\tau}{2} f(t_n, y_n)\right);$$
$$t_n = n\tau;\; y_n = y(t_n);\; n = 0, 1, 2, \ldots;\; \tau > 0.$$

8. Найдите $u(x, \pi)$ для всех $x > 0$, где

$$\begin{cases} u_{tt} = u_{xx},\; u = u(x,t),\; x \in \mathbb{R},\; t > 0, \\ u(x,0) = 0,\; u_t(x,0) = \begin{cases} 2\cos x,\; x \in [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}], \\ 0,\; x \notin [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]. \end{cases} \end{cases}$$