



ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ «ЛОМОНОСОВ»

2011-2012 учебный год

(к 300-летию со дня рождения М.В. Ломоносова – основателя Московского университета)

ЗАДАНИЯ ОТБОРОЧНОГО ЭТАПА по МАТЕМАТИКЕ

Инструкция для участника

Чтобы стать участником олимпиады, необходимо лично зарегистрироваться на портале олимпиады школьников «Ломоносов» по адресу: www.lomonosov.msu.ru.

Участник олимпиады школьников «Ломоносов» направляет решения заданий в оргкомитет через портал олимпиады, следуя размещенным там подробным инструкциям, **до 24 часов 24 января 2012 года включительно (по московскому времени)**. Работы, направленные в оргкомитет иными способами, проверяться **не будут**.

Участник по каждому предмету может направить **только одну работу**.

Информация о получении работ оргкомитетом размещается на портале олимпиады школьников «Ломоносов» **в личном кабинете участника**.

Результаты отборочного этапа будут опубликованы на портале олимпиады школьников «Ломоносов». Работы участников отборочного этапа не рецензируются и не возвращаются.

Требования к оформлению работы

1. На листах ответов запрещается указывать фамилию, имя, отчество участника.
2. Нумерация решений и ответов должна соответствовать нумерации олимпиадных заданий.
3. В листы ответов условия заданий переписывать не надо (если это не предусмотрено заданием).
4. Рукописные части работы (при их наличии), в том числе чертежи и рисунки, следует выполнять разборчиво гелевой ручкой синего или черного цвета.

Отправлять решения заданий можно только в формате **PDF**. Решения по каждому предмету отправляются **одним файлом** из личного кабинета участника на портале олимпиады школьников «Ломоносов».

7 класс

На первой странице работы (перед решениями задач) поместите таблицу ответов к ним. Для каждой задачи заведите отдельную строку. Если задача не решена или не доведена до ответа, то в графе «Ответ» поставьте прочерк. Столбец «Балл», который требуется для проверки работы, заполнять не надо.

Задача	Ответ	Балл
...

В решении задачи оценивается, прежде всего, математическая правильность, однако приветствуется и рациональность решения, а также аккуратность и подробность его текста. Все решения должны быть полными и обоснованными, ссылки на вычисления на калькуляторе и использование результатов, полученных с помощью специализированных компьютерных программ, запрещены.

При выполнении заданий не советуем прибегать к сторонней помощи: именно самостоятельное решение задач приносит пользу и помогает подготовиться к заключительному (очному) этапу. Работы с идентичными текстами решений не смогут претендовать на высокую итоговую оценку.

1. Петя ехал в трамвае, смотрел в окно и заметил своего друга Васю, который поравнялся с трамваем, следуя вдоль трамвайной линии в противоположном направлении. Через минуту Петя вышел из трамвая и побежал вдогонку за Васей вдвое быстрее него, но в четыре раза медленнее трамвая. Через какое время Петя догонит друга?
2. Расшифруйте высказывание основателя Московского университета, первого русского учёного-естествоиспытателя мирового значения (1711—1765):

Сълндпсдх молы энъ позпамнмэца позвырувэязьм.

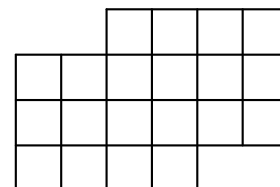
Г. Э. Уртрррнрэ

В решении опишите правило, по которому одни буквы алфавита заменены другими.

3. Сколько чисел из набора $1, 2, \dots, 2010, 2011$ не делятся ни на 3, ни на 7?
4. Заменяя знаки * только цифрами 2, 4, 5, 7 и 9, восстановите запись деления в столбик:

$$\begin{array}{r}
 * * * \quad | \quad * * \\
 * * \quad | \quad * * \\
 \hline
 * * \\
 * * \\
 \hline
 0
 \end{array}$$

5. Цену на прошлогодние автомобили сначала снизили на 25%, а затем ещё на 10%. Только после этого все автомобили удалось продать, причём прибыль от продажи составила 8%. Сколько процентов прибыли было заложено в исходную цену автомобилей?



6. Разрежьте фигуру, изображённую на рисунке, на две пары равных частей так, чтобы из них можно было сложить квадрат.

7. За круглым столом сидели рыцари. Каждый рыцарь посадил за стол между собой и ближайшим рыцарем слева своих пажей. При этом оказалось, что у всех рыцарей одинаковое число пажей, и за столом сидят 12 человек. Известно, что рыцари всегда говорят правду, а пажи могут как сказать правду, так и солгать. Король обошёл всех по кругу и задал каждому из них вопрос: «Кто сидит слева от вас?» Первый и девятый ответили: «Паж». Третий, седьмой, восьмой, десятый, одиннадцатый и двенадцатый ответили: «Рыцарь». Ответы остальных король не расслышал. Определите, сколько рыцарей сидело за столом.

8 класс

На первой странице работы (перед решениями задач) поместите таблицу ответов к ним. Для каждой задачи заведите отдельную строку. Если задача не решена или не доведена до ответа, то в графе «Ответ» поставьте прочерк. Столбец «Балл», который требуется для проверки работы, заполнять не надо.

Задача	Ответ	Балл
...

В решении задачи оценивается, прежде всего, математическая правильность, однако приветствуется и рациональность решения, а также аккуратность и подробность его текста. Все решения должны быть полными и обоснованными, ссылки на вычисления на калькуляторе и использование результатов, полученных с помощью специализированных компьютерных программ, запрещены.

При выполнении заданий не советуем прибегать к сторонней помощи: именно самостоятельное решение задач приносит пользу и помогает подготовиться к заключительному (очному) этапу. Работы с идентичными текстами решений не смогут претендовать на высокую итоговую оценку.

1. Теплоход шёл по реке и поравнялся с плотом, а через час — с лодкой, плившими по реке в противоположном теплоходу направлении. Через какое время после момента встречи с теплоходом лодка догонит плот, если она движется по реке вдвое быстрее него, но в три раза медленнее теплохода?

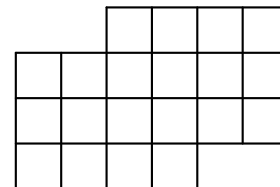
2. Какое из чисел больше: $2005^2 + 1711^2$ или $1961^2 + 1755^2$? Выполните сравнение наиболее рациональным способом.

Комментарий. 2005 — первый год проведения олимпиады школьников «Ломоносов», 1711 — год рождения основателя Московского университета, первого русского учёного-естествоиспытателя мирового значения Михаила Васильевича Ломоносова, 1961 — год первого полёта человека в космос, 1755 — год основания Московского университета.

3. Медиана AM и биссектриса BK треугольника ABC пересекаются в точке O . Известно, что $BO = 2OK$. Верно ли, что треугольник ABC равнобедренный? Ответ обоснуйте.

4. На доске написано трёхзначное число, все цифры которого отличны от нуля. Учитель стёр его левую цифру и приписал её к оставшемуся двузначному числу справа. Ученик заметил, что новое трёхзначное число оказалось на 18 меньше, чем исходное. На какую величину может измениться новое число, если учитель проделает с ним те же действия? Найдите все возможные значения этой величины.

5. Разрежьте фигуру, изображённую на рисунке, на две пары равных частей так, чтобы из них можно было сложить квадрат. Предложите как можно больше способов такого разрезания.



6. Решите в натуральных числах уравнение $a^b + b^a = 2011$.

7. Пятеро друзей поехали на пикник и захватили с собой пять одинаковых круглых ватрушек. Приехав на место, они обнаружили, что одна ватрушка испортилась. Могут ли друзья разделить на части четыре оставшиеся ватрушки так, чтобы каждому из них достался одинаковый набор из трёх частей и лишних частей при этом не осталось? Ответ обоснуйте.

8. Решите уравнение $4(x^3 - x) = (x^2 + 1)^2$.

9 класс

На первой странице работы (перед решениями задач) поместите таблицу ответов к ним. Для каждой задачи заведите отдельную строку. Если задача не решена или не доведена до ответа, то в графе «Ответ» поставьте прочерк. Столбец «Балл», который требуется для проверки работы, заполнять не надо.

Задача	Ответ	Балл
...

В решении задачи оценивается, прежде всего, математическая правильность, однако приветствуется и рациональность решения, а также аккуратность и подробность его текста. Все решения должны быть полными и обоснованными, ссылки на вычисления на калькуляторе и использование результатов, полученных с помощью специализированных компьютерных программ, запрещены.

При выполнении заданий не советуем прибегать к сторонней помощи: именно самостоятельное решение задач приносит пользу и помогает подготовиться к заключительному (очному) этапу. Работы с идентичными текстами решений не смогут претендовать на высокую итоговую оценку.

1. Цену на прошлогодние автомобили сначала снизили на 25%, а затем ещё на 10%. Только после этого все автомобили удалось продать, причём прибыль от продажи составила 8%. Сколько процентов прибыли было заложено в исходную цену автомобилей?
2. Вычислите площадь общей части двух ромбов, из которых у первого диагонали равны 2 и 3, а второй получается поворотом первого на 90° относительно его центра.
3. За круглым столом сидели рыцари. Каждый рыцарь посадил за стол между собой и ближайшим рыцарем слева своих пажей. При этом оказалось, что у всех рыцарей одинаковое число пажей, и за столом сидят 12 человек. Известно, что рыцари всегда говорят правду, а пажи могут как сказать правду, так и солгать. Король обошёл всех по кругу и задал каждому из них вопрос: «Кто сидит слева от вас?» Первый и девятый ответили: «Паж». Третий, седьмой, восьмой, десятый, одиннадцатый и двенадцатый ответили: «Рыцарь». Ответы остальных король не расслышал. Определите, сколько пажей сидело за столом.
4. На доске написано трёхзначное число, все цифры которого отличны от нуля. Учитель стёр его левую цифру и приписал её к оставшемуся двузначному числу справа. Ученик заметил, что новое трёхзначное число оказалось на 18 меньше, чем исходное. На какую величину может измениться новое число, если учитель проделает с ним те же действия? Найдите все возможные значения этой величины.
5. Каждую точку плоскости раскрасили в один из нескольких цветов. При этом оказалось, что ни на одной прямой этой плоскости нельзя найти три точки разного цвета. Какое наибольшее количество цветов могло быть использовано при этой раскраске плоскости?
6. Найдите все такие значения n , что среди любого набора из n натуральных чисел, являющихся точными квадратами, всегда найдутся два числа, разность которых делится на 2011.
7. Десять друзей поехали на пикник и захватили с собой десять одинаковых круглых ватрушек. Приехав на место, они обнаружили, что одна ватрушка испортилась. Могут ли друзья разделить на части девять оставшихся ватрушек так, чтобы каждому из них достался одинаковый набор из трёх частей и лишних частей при этом не осталось? Ответ обоснуйте.
8. Решите уравнение $4(x^3 - x) = (x^2 + 1)^2$.
9. В равнобедренном треугольнике ABC провели биссектрису BP . Какие значения может принимать $\angle BAC$, если $AP + PB = BC$?

10–11 классы

На первой странице работы (перед решениями задач) поместите таблицу ответов к ним. Если задача не решена или не доведена до ответа, то в соответствующей графе поставьте прочерк. Столбец «Балл», который требуется для проверки работы, заполнять не нужно.

Задача	Ответ	Балл
№1		
№2		
№3		
№4		
№5		
№6		
№7		
№8		
№9		
№10 а)		
№10 б)		
№10 в)		

В решении задачи оценивается, прежде всего, математическая правильность, однако приветствуется и рациональность решения, а также аккуратность и подробность его текста. Все решения должны быть полными и обоснованными, ссылки на вычисления на калькуляторе и использование результатов, полученных с помощью специализированных компьютерных программ, запрещены. Работы с идентичными решениями не смогут претендовать на высокую оценку.

Не советуем прибегать к услугам репетиторов или более подготовленных товарищей, так как если Вас пригласят на следующий (очный) тур олимпиады, факт помощи станет очевидным, и Вы почувствуете себя неловко.

1. Хозяйка растворила 4 пакетика удобрений в воде, которой полила имеющиеся у нее 5 горшков рассады. Однако воды оказалось слишком много, и $2/5$ раствора перелилось через край. По инструкции, удобрять надо было из расчета не менее, чем 5 пакетиков на 4 горшка. Какое наименьшее целое число пакетиков удобрений хозяйке потребуется ещё, чтобы удобрить рассаду по инструкции?

2. Решите неравенство $\sqrt{x+1} - \sqrt{3-x} \geq \arcsin(x^2 - 2x - 4)$.

3. В треугольник со сторонами 3, 5 и 6 вписана окружность, касающаяся сторон треугольника в точках A , B и C . Найдите площадь треугольника ABC .

4. Найдите множество значений функции

$$y(x) = \operatorname{tg}^2 2x + 6 \sin x - 2 \cos 2x - \frac{1}{\cos^2 2x}.$$

5. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых уравнение

$$|x-1| + |x-2| + \dots + |x-2012| = ax + b$$

ни при одном значении параметра b не имеет ровно двух корней.

6. На длинном прямолинейном проводе сидели белая и серая вороны, а между ними воробей и сорока: воробей — посередине, а сорока — к белой вороне в полтора раза ближе, чем к серой. Расстояния от белой вороны, серой вороны и сороки до другого прямолинейного провода равны 16 м, 34 м и 20 м соответственно. Найдите расстояние от воробья до этого провода.

7. Найдите сумму квадратов всех действительных корней уравнения

$$x^5 + 2010x^2 + 2011 = x^4 + 2011x^3 + 2012x.$$

8. В равнобедренном треугольнике LMN проведена биссектриса MO . Найдите величину угла LOM , если $MN = MO + LO$.

9. Петя и Вася играют в морской бой по изменённым правилам: на поле 8×8 клеток Петя расставляет без перекрытий 21 прямоугольный трёхклеточный корабль, а Вася делает выстрелы, называя “шахматные координаты” полей (например, A1 или F7). В первой партии Вася выстрелил и сразу же промахнулся. Куда стрелял Вася (назовите все возможные варианты клеток)?

10. Маленькая мышка в крошечной тьме оказалась на бетонном полу длинного прямого коридора с деревянными стенами, расположенными на расстоянии 2 м друг от друга. Чтобы выбраться наружу, мышке нужно вслепую добраться до стены и прогрызть в ней дыру. Существует ли путь, двигаясь по которому, мышка гарантированно (независимо от её начального положения и направления коридора) выйдет к какой-нибудь стене, пройдя не более

а) 4 м 83 см;

б) 4 м 62 см;

в) 4 м 58 см?