

Рис. 3.

4. На огромном лугу пасётся барашек, привязанный двумя верёвками к двум колам (к каждому — своей верёвкой).

а) Какой окажется фигура на лугу, с которой барашек сможет съесть траву?

б) Посередине между колами растёт роза, а расстояние между колами равно 20 м. Какими должны быть длины верёвок, чтобы барашек не смог съесть розу?

Ответ: б) Ровно одна из верёвок короче 10 м.

Решение. а) Искомая фигура — пересечение двух кругов с центрами в колах и радиусами, равными соответственно длинам  $l_1$  и  $l_2$  первой и второй верёвок. Поэтому это может быть или фигура, закрашенная на рис. 3, или

полный круг. Последний случай имеет место, если  $|l_1 - l_2| \geq r$ , где  $r$  — расстояние между колами, поскольку тогда один из кругов полностью лежит в другом, и искомая фигура совпадает с кругом меньшего радиуса.

б) Чтобы роза не попадала в фигуру на лугу, с которой барашек может съесть траву, она должна лежать вне одной из окружностей, ограничивающих эту фигуру. Расстояние от неё до каждого из колов равно  $r/2 = 20/2 = 10$  м, поэтому длина одной из верёвок должна быть меньше 10 м.

5. Какое из чисел больше:  $\frac{\overbrace{77\dots7}^{2009}}{\underbrace{77\dots77}_{2010}}$  или  $\frac{\overbrace{33\dots3}^{2010}}{\underbrace{33\dots33}_{2011}}$ ?

Ответ: Второе.

Решение. Поскольку

$$\frac{\overbrace{77\dots7}^{2009}}{\underbrace{77\dots77}_{2010}} = \frac{\overbrace{11\dots1}^{2009}}{\underbrace{11\dots11}_{2010}} = \frac{\overbrace{11\dots11}^{2010} - \overbrace{100\dots0}^{2009}}{\underbrace{11\dots11}_{2010}} = 1 - \frac{\overbrace{100\dots0}^{2009}}{\underbrace{11\dots11}_{2010}}$$

и

$$\frac{\overbrace{33\dots3}^{2010}}{\underbrace{33\dots33}_{2011}} = \frac{\overbrace{11\dots1}^{2010}}{\underbrace{11\dots11}_{2011}} = \frac{\overbrace{11\dots11}^{2011} - \overbrace{100\dots0}^{2010}}{\underbrace{11\dots11}_{2011}} = 1 - \frac{\overbrace{100\dots0}^{2010}}{\underbrace{11\dots11}_{2011}},$$

достаточно сравнить дроби

$$\frac{\overbrace{100\dots0}^{2009}}{\underbrace{11\dots11}_{2010}} \quad \text{и} \quad \frac{\overbrace{100\dots0}^{2010}}{\underbrace{11\dots11}_{2011}}.$$

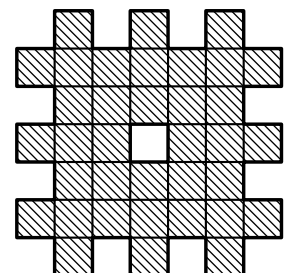
Первая из них больше, так как для обратных к ним чисел справедливо неравенство

$$\frac{\overbrace{11\dots11}^{2010}}{\overbrace{100\dots0}^{2009}} = 1, \overbrace{11\dots11}^{2009} < 1, \overbrace{11\dots11}^{2010} = \frac{\overbrace{11\dots11}^{2011}}{\overbrace{100\dots0}^{2010}}.$$

6. Можно ли фигуру, изображённую на рисунке, разрезать по клеточкам на четыре равные части так, чтобы из них можно было сложить квадрат?

Ответ: Да.

Решение. Способ разрезать фигуру и сложить из получившихся частей



квадрат  $6 \times 6$  показан на рис. 4.

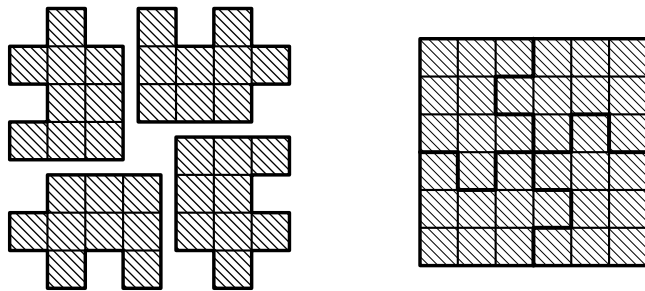


Рис. 4.

7. Из-за пробки на выезде из города междугородный автобус прошёл первую треть пути в полтора раза медленнее расчётного времени. Сможет ли автобус без опоздания прибыть в пункт назначения, если на оставшейся части пути увеличит скорость на треть?

*Ответ:* Да.

*Решение.* На прохождение первой трети пути автобус затратил  $\frac{3}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{2}$  часть расчётного времени. Если он увеличит скорость на треть, то оставшиеся две трети пути он пройдёт за  $\frac{2/3}{4/3} = \frac{1}{2}$  часть расчётного времени, а значит, сможет прибыть в пункт назначения без опоздания.

8. Прямоугольник разбили прямыми, параллельными сторонам, на несколько прямоугольников так, как показано на рисунке. Площади некоторых из них известны и отмечены на рисунке, а площади  $a$  и  $b$  неизвестны. Найдите  $a$  и  $b$ .

*Ответ:*  $a = 30$ ,  $b = 55$ .

*Решение.* Площадь прямоугольника, отмеченного числом 104, относится к площади прямоугольника, отмеченного числом 40, так же, как 143 относится к  $b$  (это отношение равно отношению вертикальных сторон прямоугольников во второй и первой снизу строках):

$$104 : 40 = 143 : b \quad \Rightarrow \quad b = \frac{143 \cdot 40}{104} = 55.$$

Зная значение  $b$ , таким же образом найдём площадь  $a$ , рассматривая отношение вертикальных сторон прямоугольников в первой и третьей строках:

$$25 : a = b : 66 \quad \Rightarrow \quad a = \frac{66 \cdot 25}{b} = \frac{66 \cdot 25}{55} = 30.$$

$a$		54	66
	104		143
25	40		$b$

# Олимпиада «Ломоносов» по математике

## Условия, ответы и краткие решения заданий отборочного этапа

(8 класс, 2010/2011 учебный год)

1. Избавившись от колорадского жука, фермер стал собирать с 24 га столько картофеля, сколько прежде собирал с 27 га. На сколько процентов повысилась урожайность картофеля?

*Ответ:* 12,5%.

*Решение.* С 24 га фермер стал собирать в  $27/24 = 1,125$  раза больше картофеля, чем прежде. Значит, урожайность картофеля повысилась на 12,5%.

2. Могут ли две биссектрисы внутренних углов треугольника пересекаться под прямым углом?

*Ответ:* Нет.

*Решение.* Предположим противное: пусть в некотором треугольнике  $ABC$  биссектрисы углов  $\angle A$  и  $\angle C$  пересекаются под прямым углом в точке  $K$  (см. рис. 1). Поскольку сумма углов треугольника  $AKC$  равна  $180^\circ$ , а  $\angle AKC = 90^\circ$ , то сумма двух оставшихся углов равна  $\angle KAC + \angle KCA = 90^\circ$ . Но по условию,  $AK$  — биссектриса угла  $\angle BAC$ , поэтому  $\angle BAC = 2\angle KAC$ , и аналогично  $\angle BCA = 2\angle KCA$ . Следовательно,  $\angle BAC + \angle BCA = 2(\angle KAC + \angle KCA) = 180^\circ$ . С другой стороны, сумма углов треугольника  $ABC$  также равна  $180^\circ$ , поэтому  $\angle BAC + \angle BCA = 180^\circ - \angle ABC < 180^\circ$ . Противоречие.

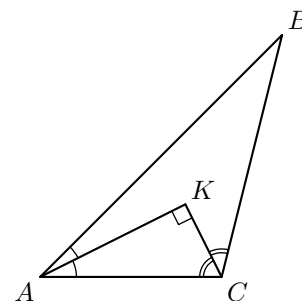


Рис. 1.

3. Решите уравнение

$$\frac{x^7 - 1}{x^5 - 1} = \frac{x^5 - 1}{x^3 - 1}.$$

*Ответ:* 0, -1.

*Решение.* При  $x \neq 1$  оба знаменателя отличны от нуля, и по правилу пропорции данное уравнение принимает вид

$$(x^7 - 1)(x^3 - 1) = (x^5 - 1)^2 \Leftrightarrow x^7 - 2x^5 + x^3 = 0 \Leftrightarrow x^3(x^2 - 1)^2 = 0 \Leftrightarrow x^3(x - 1)^2(x + 1)^2 = 0.$$

Левая часть последнего уравнения обращается в нуль при  $x = -1, 0$  и  $1$ , но в ответ входят лишь два значения:  $x = -1$  и  $0$ , поскольку при  $x = 1$  исходные дроби смысла не имеют.

4. Можно ли фигуру, изображённую на рисунке, разрезать по клеточкам на четыре равные части так, чтобы из них можно было сложить квадрат?

*Ответ:* Да.

*Решение.* Способ разрезать фигуру и сложить из получившихся частей квадрат  $6 \times 6$  показан на рис. 2.

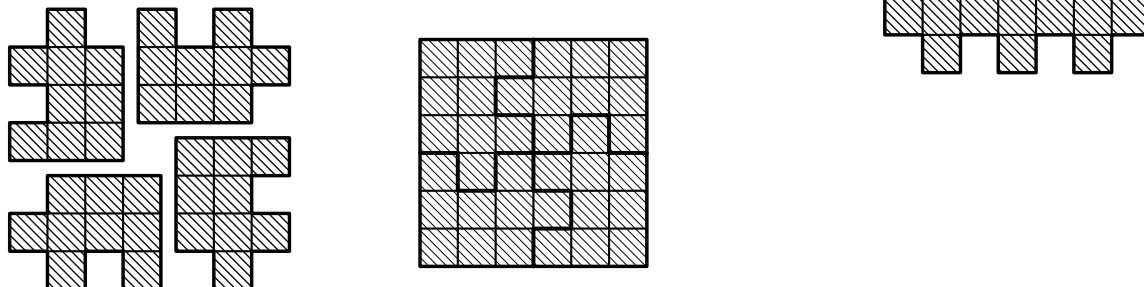


Рис. 2.

5. Из пунктов  $A$  и  $B$  навстречу друг другу одновременно отправились два поезда. Известно, что в 14:00 они встретились и, не меняя скорости, продолжили движение. Один поезд прибыл в пункт  $B$  в 18:00, а другой прибыл в пункт  $A$  в 23:00. В какой момент времени поезда отправились

в путь?

Ответ: 8:00.

Решение. Пусть поезда отправились за  $t$  часов до момента встречи и пусть  $v_1$  — скорость первого поезда,  $v_2$  — скорость второго. Тогда первый поезд прошел расстояние  $tv_1$  от пункта  $A$  до пункта встречи с вторым поездом, а второй поезд прошёл это же расстояние (после встречи с первым поездом) за 9 часов, поэтому  $tv_1 = 9v_2$ . Аналогично, второй поезд прошел расстояние  $tv_2$  от пункта  $B$  до пункта встречи, а первый поезд затем прошел это расстояние за 4 часа, поэтому  $tv_2 = 4v_1$ . Перемножая два этих уравнения, получим

$$tv_1 \cdot tv_2 = 9v_2 \cdot 4v_1 \Rightarrow t^2 = 36 \Rightarrow t = 6.$$

Итак, поезда отправились в путь за 6 часов до 14:00, т. е. в 8:00.

6. Вычислите

$$\frac{2ab(a^3 - b^3)}{a^2 + ab + b^2} - \frac{(a - b)(a^4 - b^4)}{a^2 - b^2} \quad \text{при } a = -1, \underbrace{5 \dots 5}_{2010}6, \quad b = 5, \underbrace{4 \dots 4}_{2011}.$$

Ответ: 343.

Решение. При заданных  $a$  и  $b$  получаем

$$\begin{aligned} \frac{2ab(a^3 - b^3)}{a^2 + ab + b^2} - \frac{(a - b)(a^4 - b^4)}{a^2 - b^2} &= 2ab(a - b) - (a - b)(a^2 + b^2) = \\ &= -(a - b)(a^2 - 2ab + b^2) = -(a - b)^3 = -(-7)^3 = 343. \end{aligned}$$

7. Петя последовательно выписывает целые числа, начиная с 21, так, что каждое следующее число меньше предыдущего на 4, а Вася, глядя на очередное число, подсчитывает сумму всех выписанных к этому моменту чисел. Какая из найденных Васей сумм окажется ближайшей к 55?

Ответ: 56.

Решение. Составим таблицу, в первой строке которой будем записывать числа вслед за Петей, а во второй строке поместим результаты Васиных вычислений.

21	17	13	9	5	1	-3	-7	-11	...
21	38	51	60	65	66	63	56	45	...

Поскольку числа, которые будет далее выписывать Вася, отрицательны, подсчитываемая Колей сумма будет убывать, удаляясь от 55. Значит, ближайшей к 55 окажется сумма, равная 56.

8. Прямоугольник разбили прямыми, параллельными сторонам, на несколько прямоугольников так, как показано на рисунке. Площади некоторых из них известны и отмечены на рисунке, а площади  $a, b, c$  неизвестны. Найдите  $a, b, c$ .

Ответ:  $a = 25, b = 54, c = 144$ .

Решение. Площадь прямоугольника, отмеченного числом 143, относится к площади прямоугольника, отмеченного числом 78, так же, как 99 относится к  $b$ , и так же, как 264 относится к  $c$  (это отношение равно отношению вертикальных сторон прямоугольников в первой и третьей снизу строках):

$$143 : 78 = 99 : b = 264 : c \Rightarrow b = \frac{78 \cdot 99}{143} = 54, \quad c = \frac{78 \cdot 264}{143} = 144.$$

Чтобы вычислить значение  $a$ , найдём сначала площадь прямоугольника в левом верхнем углу (пусть она равна  $x$ ). Для этого рассмотрим отношение вертикальных сторон прямоугольников в первой и второй сверху строках:

$$x : 143 = 45 : 99 \Rightarrow x = \frac{143 \cdot 45}{99} = 65.$$

Зная теперь значение  $x$ , таким же способом найдём  $a$ , рассматривая отношение вертикальных сторон прямоугольников в первой и третьей сверху строках:

$$x : 91 = a : 35 \quad \Rightarrow \quad a = \frac{x \cdot 35}{91} = \frac{65 \cdot 35}{91} = 25.$$

**9.** Найдите наименьшее натуральное число, которое больше суммы своих цифр на 1755 (год основания Московского университета).

*Ответ:* 1770.

*Решение.* Из условия следует, что искомое число не может состоять из трёх и менее цифр. Будем искать наименьшее такое число в виде  $\overline{abcd}$ , где  $a, b, c, d$  — цифры, причём  $a \neq 0$ . Составим уравнение:

$$\begin{aligned} \overline{abcd} = a + b + c + d + 1755 &\Leftrightarrow 1000a + 100b + 10c + d = a + b + c + d + 1755 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 999a + 99b + 9c = 1755 \Leftrightarrow 111a + 11b + c = 195. \end{aligned}$$

Из последнего уравнения заключаем, что единственное возможное значение цифры  $a$  равно 1. Далее, получаем уравнение  $11b + c = 84$ , а значит, цифра  $b$  может быть равна только 7. Наконец, остаётся найти значение  $c = 84 - 11 \cdot 7 = 7$ . Итак, искомым числом является 1770, поскольку из всех чисел вида  $\overline{177d}$  оно является наименьшим.