Олимпиада «Ломоносов-2008»

Вариант 10.1

1. Найти k, если $$4-\cfrac{1}{4-\cfrac{1}{4-\cfrac{1}{2k+\sqrt{3}}}}=2+\sqrt{3}.$$
2. Какое наибольшее число раз можно последовательно взять логарифм по основанию 5 от числа $625^{1,5}$ (первый раз логарифм берется от этого числа, а затем всякий раз – от числа, полученного в предыдущий раз)?
3. При каких значениях a существует единственное решение системы
$$\begin{cases} x^2+y^2=9, \\ (x-4)^2+(y-3)^2=a? \end{cases}$$
4. Кот преследует мышку по прямолинейной дорожке, ведущей к норке мышки. Их скорости постоянны. В некоторый момент расстояние от мышки до кота было равно $13\,м$, а до норки - $4\,м$. В некоторый предыдущий момент расстояние между мышкой и котом было втрое больше расстояния между ней и норкой. Успеет ли кот догнать мышку, прежде чем та юркнет в норку?
5. Найти высоту равнобедренного треугольника, проведенную из вершины его основания, равного $2\sqrt{2}$, если синус одного его угла равен косинусу другого.
6. Решить неравенство
$$\sqrt{4^x-5^{1-x}}<8\cdot 5^{-\frac{x}{2}}-2^{x+1}.$$
7. Решить уравнение
$$\sqrt{2}+\cos x+\left|\cos\frac{4x}{3}\right|\cdot\sin x=0.$$
8. Основанием прямой призмы $ABCA_1B_1C_1$ служит прямоугольный треугольник с катетами $AB=6$ и $AC=5$. Через середину бокового ребра $CC_1=2$ параллельно AB проведена прямая l. Какие значения может принимать площадь параллелограмма, у которого две вершины – точки A_1 и C_1 , а остальные две вершины лежат на прямых AB_1 и l соответственно?
9. Найти все натуральные значения n, удовлетворяющие уравнению
$$2008\left[n\sqrt{1004^2+1}\right]=n\left[2008\sqrt{1004^2+1}\right],$$
где $[x]$- наибольшее целое число, не превосходящее числа x.
10. На числовой прямой отмечены 4 желтые точки, соответствующие первым членам геометрической прогрессии с первым членом -3 и знаменателем -2, а также 4 зеленые точки, соответствующие первым членам некоторой арифметической прогрессии с первым членом -9. Какова при

этом наименьшая возможная сумма длин четырёх отрезков с разноцветными концами, включающими все 8 отмеченных точек? (Каждая из 8 точек является концом одного из отрезков.)

Ответы:

1. 1. **2.** 4 раза. **3.** $a=4$ или $a=64$.

4. не успеет. **5.** $\sqrt{2}$ или 2. **6.** $[\log_{20}5;\log_{20}9)$.

7. $\left\{-\frac{3\pi}{4}+6\pi k\right\}$, $k\in Z$ **8.** $5\sqrt{10}$ или $5\sqrt{82}$. **9.** $n=1,2,...,2008$.

10. 15.

Вариант 10.1

1. Найти k, если $\dfrac{1}{\dfrac{1}{\dfrac{1}{\sqrt{5}-2k}+4}+4}+4=\sqrt{5}+2$.
2. Какое наибольшее число раз можно последовательно взять логарифм по основанию 3 от числа 27^{81} (первый раз логарифм берется от этого числа, а затем всякий раз – от числа, полученного в предыдущий раз)?
3. При каких значениях a существует единственное решение системы
$$\begin{cases} x^2+y^2=9, \\ (x-3)^2+(y+4)^2=a? \end{cases}$$
4. Лиса преследует кролика по прямолинейной дорожке, ведущей к норе кролика. Их скорости постоянны. В некоторый момент расстояние от кролика до норы было равно $7\,м$, а до лисы - $13\,м$. В некоторый предыдущий момент расстояние между кроликом и норой было вдвое меньше расстояния между ним и лисой. Успеет ли лиса догнать кролика, прежде чем тот юркнет в нору?
5. Найти радиус окружности, описанной около равнобедренного треугольника с основанием 6, если синус одного его угла равен косинусу другого.
6. Решить неравенство
$$\sqrt{25^x-2^{3-x}}<7\cdot 2^{-\frac{x}{2}}-2\cdot 5^x.$$
7. Решить уравнение
$$2+\cos x=\sqrt{3}\left|\sin\frac{3x}{4}\right|\cdot\sin x.$$

8. Основанием прямой призмы $ABCA_1B_1C_1$ служит прямоугольный треугольник с катетами $AB = 3$ и $AC = 4$. Через середину бокового ребра $BB_1 = 10$ параллельно AC проведена прямая l. Какие значения может принимать площадь параллелограмма, у которого две вершины – точки A и B , а остальные две вершины лежат на прямых A_1C и l соответственно?
9. Найти все натуральные значения n, удовлетворяющие уравнению
$$2002\left[n\sqrt{1001^2+1}\right] = n\left[2002\sqrt{1001^2+1}\right],$$
где $[x]$- наибольшее целое число, не превосходящее числа x.
10. На числовой прямой отмечены 4 синие точки, соответствующие первым членам геометрической прогрессии с первым членом -2 и знаменателем -2, а также 4 зеленые точки, соответствующие первым членам некоторой арифметической прогрессии с первым членом -5. Какова при этом наименьшая возможная сумма длин четырёх отрезков с разноцветными концами, включающими все 8 отмеченных точек? (Каждая из 8 точек является концом одного из отрезков.)

Ответы:

1. -1. **2.** 5 раз. **3.** $a = 9$ или $a = 49$.

4. не успеет. **5.** $2\sqrt{3}$ или 3. **6.** $\left[\log_{50} 8; \log_{50} 9\right)$.

7. $\left\{\frac{2\pi}{3} + 4\pi k\right\}$, $k \in \mathrm{Z}$. **8.** $3\sqrt{29}$ или $3\sqrt{61}$. **9.** $n = 1,2,...,2002$.

10. 12.