

1. Найдите в явном виде натуральное число, заданное выражением  $\sqrt{7 + 2\sqrt{10}}(\sqrt{5} - \sqrt{2})$ .
2. Найдите максимальное значение функции  $\log_{1/3}(x^2 + 10x + 34)$ .
3. Найдите все положительные  $x$ , удовлетворяющие неравенству  $x^{-7x+5} < x^{-4}$ .
4. Решите уравнение  $\cos^2 x + \sqrt{2} |\cos x| \sin\left(\frac{5x}{2} - \frac{\pi}{8}\right) + \frac{1}{2} = 0$ .
5. Окружности  $\Omega_1$  и  $\Omega_2$  с центрами в точках  $O_1$  и  $O_2$  касаются внешним образом в точке  $A$ . Общая внешняя касательная к этим окружностям касается  $\Omega_1$  в точке  $B$  и пересекает в точке  $C$  общую касательную этих окружностей, проходящую через точку  $A$ . Прямая, делящая угол  $ACO_1$  пополам, пересекает прямые  $O_1O_2$  и  $BO_1$  в точках  $L$  и  $D$  соответственно. Найдите  $LO_1$ , если известно, что  $CO_2 = 2$ , а прямые  $CO_2$  и  $DO_2$  перпендикулярны.
6. Найдите все  $x, y$  на интервале  $(0, \frac{\pi}{2})$ , удовлетворяющие системе уравнений

$$\begin{cases} \frac{1}{\sin^3 x} + \frac{1}{\cos^3 y} = 54 \\ \operatorname{ctg}^2 x + \operatorname{tg}^2 y = 16 \end{cases}$$

7. В основании прямой призмы лежит квадрат со стороной 1. Высота призмы равна  $\sqrt{3}$ . Найдите расстояние между большой диагональю призмы и скрещивающейся с ней диагональю боковой грани.

8. Пусть

$$f(x, y) = \sqrt{-6x^2 - 11y^2 - 16xy + 5} + y,$$

$$g(x, y) = -\sqrt{-6x^2 - 11y^2 - 16xy + 5} + y.$$

Найдите все значения, которые может принимать хотя бы одна из этих функций.

Московский Государственный Университет им. М.В. Ломоносова

Дополнительное вступительное испытание по математике

июль 2014 года

1. Найдите в явном виде натуральное число, заданное выражением  $\sqrt{7 - 4\sqrt{3}}(8 + 4\sqrt{3})$ .
2. Найдите максимальное значение функции  $\log_{1/2}(x^2 - 6x + 17)$ .
3. Найдите все положительные  $x$ , удовлетворяющие неравенству  $x^{3x+7} > x^{12}$ .
4. Решите уравнение  $\cos^2 x - \cos x \sin^2\left(\frac{5x}{4} - \frac{5\pi}{12}\right) + \frac{1}{4} = 0$ .
5. Окружности  $\Omega_1$  и  $\Omega_2$  с центрами в точках  $O_1$  и  $O_2$  касаются внешним образом в точке  $A$ . Общая внешняя касательная к этим окружностям касается  $\Omega_1$  и  $\Omega_2$  соответственно в точках  $B_1$  и  $B_2$ . Общая касательная к окружностям, проходящая через точку  $A$ , пересекает отрезок  $B_1B_2$  в точке  $C$ . Прямая, делящая угол  $ACO_2$  пополам, пересекает прямые  $O_1B_1$ ,  $O_1O_2$ ,  $O_2B_2$  в точках  $D_1$ ,  $L$ ,  $D_2$  соответственно. Найдите отношение  $LD_2 : O_2D_2$ , если известно, что  $CD_1 = CO_1$ .
6. Найдите все положительные  $x$ ,  $y$ , удовлетворяющие системе уравнений

$$\begin{cases} x^{3/2} + y = 16 \\ x + y^{2/3} = 8 \end{cases}$$

7. В основании прямой призмы лежит правильный треугольник со стороной 1. Высота призмы равна  $\sqrt{2}$ . Найдите расстояние между скрещивающимися диагоналями боковых граней.
8. Пусть

$$\begin{aligned} f(x, y) &= \sqrt{-6x^2 - 14y^2 - 18xy + 6} + y, \\ g(x, y) &= -\sqrt{-6x^2 - 14y^2 - 18xy + 6} + y. \end{aligned}$$

Найдите все значения, которые может принимать хотя бы одна из этих функций.

Московский Государственный Университет им. М.В. Ломоносова

Дополнительное вступительное испытание по математике

июль 2014 года

1. Найдите в явном виде натуральное число, заданное выражением  $\sqrt{5 - 2\sqrt{6}}(\sqrt{2} + \sqrt{3})$ .

2. Найдите максимальное значение функции  $\log_{1/3}(x^2 + 4x + 31)$ .

3. Найдите все положительные  $x$ , удовлетворяющие неравенству  $x^{-5x-3} < x^{-7}$ .

4. Решите уравнение  $\sin^2 x + \sqrt{2} |\sin x| \cos\left(\frac{5x}{2} - \frac{5\pi}{8}\right) + \frac{1}{2} = 0$ .

5. Окружности  $\Omega_1$  и  $\Omega_2$  с центрами в точках  $O_1$  и  $O_2$  касаются внешним образом в точке  $A$ . Общая внешняя касательная к этим окружностям касается  $\Omega_1$  в точке  $B$  и пересекает в точке  $C$  общую касательную этих окружностей, проходящую через точку  $A$ . Прямая, делящая угол  $ACO_1$  пополам, пересекает прямые  $O_1O_2$  и  $BO_1$  в точках  $L$  и  $D$  соответственно. Найдите  $CO_2$ , если известно, что  $LO_1 = 2$ , а прямые  $CO_2$  и  $DO_2$  перпендикулярны.

6. Найдите все  $x, y$  на интервале  $(0, \frac{\pi}{2})$ , удовлетворяющие системе уравнений

$$\begin{cases} \frac{1}{\cos^3 x} + \frac{1}{\sin^3 y} = 16 \\ \operatorname{tg}^2 x + \operatorname{ctg}^2 y = 6 \end{cases}$$

7. В основании прямой призмы лежит квадрат со стороной 1. Высота призмы равна  $\sqrt{7}$ . Найдите расстояние между большой диагональю призмы и скрепляющей с ней диагональю боковой грани.

8. Пусть

$$\begin{aligned} f(x, y) &= \sqrt{-5x^2 - 13y^2 - 16xy + 2} + y, \\ g(x, y) &= -\sqrt{-5x^2 - 13y^2 - 16xy + 2} + y. \end{aligned}$$

Найдите все значения, которые может принимать хотя бы одна из этих функций.