Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова

Вступительное испытание по математике 2005 года

Вариант 1 (олимпиада «Ломоносов-2005»)

1. Вычислите

$$\frac{(x-y)(x^4-y^4)}{x^2-y^2} - \frac{2xy(x^3-y^3)}{x^2+xy+y^2}$$

при

$$x = 1,\underbrace{2\ldots 2}_{46}2, \quad y = -2,\underbrace{7\ldots 7}_{45}8.$$

2. Решите неравенство

$$\frac{3\cdot 2^{1-x}+1}{2^x-1} \geqslant \frac{1}{1-2^{-x}}.$$

3. Найдите площадь трапеции $ABCD$ с боковой стороной $BC=5$, если расстояния от вершин A и D до прямой BC равны 3 и 7 соответственно.

4. Решите уравнение

$$\log_4(4\sin^2 2x) = 2 - \log_2(-2\operatorname{tg} x).$$

5. На окружности взята точка A, на ее диаметре BC — точки D и E, а на его продолжении за точку B — точка F. Найдите BC, если $\angle BAD = \angle ACD$, $\angle BAF = \angle CAE$, $BD = 2$, $BE = 5$ и $BF = 4$.

6. Решите неравенство

$$5|x| \leqslant x\left(3x+2-2\sqrt{8-2x-x^2}\right).$$

7. Основанием пирамиды служит треугольник со сторонами 5, 12 и 13, а ее высота образует с высотами боковых граней (опущенными из той же вершины) одинаковые углы, не меньшие 30°. Какой наибольший объем может иметь такая пирамида?

8. Найдите все значения a, при которых уравнение

$$4x - |3x - |x+a|| = 9|x-1|$$

имеет хотя бы один корень.

9. Группа отдыхающих в течение 2 ч 40 минут каталась на моторной лодке по реке с постоянной скоростью (относительно воды) попеременно то по течению, то против: в каждую сторону в общей сложности не менее чем по 1 ч. В итоге лодка прошла путь в 40 км (относительно берега) и,

отчалив от пристани A, причалила к пристани B на расстоянии 10 км от A. В какую сторону текла река? Какова при этих условиях максимальная скорость ее течения?

10. При каждом натуральном n тело Φ_n в координатном пространстве задано неравенством

$$3|x|^n + |8y|^n + |z|^n < 1,$$

а тело Φ — объединение всех тел Φ_n. Найдите объем Φ.

Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова

Вступительное испытание по математике 2005 года

Вариант 2 (механико-математический факультет)

1. Согласно расписанию, автобус курсирует по маршруту из пункта A в пункт B и обратно с постоянной скоростью и без остановок. На пути из A в B он был вынужден на некоторое время остановиться, поэтому на обратном пути увеличил скорость на 25%. Приехав в A с 10-минутным отклонением от расписания, он уменьшил свою последнюю скорость на 24% и прибыл в B вовремя. Какова была продолжительность вынужденной остановки?

2. Найдите $\log_2 \dfrac{2x}{2^x}$ при условии

$$\left|\log_{\sqrt{2}} x^{x/2} - 2\log_2 x\right| + \left||2-x| - |\log_2 x|\right| \leqslant (x-2)\log_8 x^3.$$

3. Решите неравенство

$$\frac{3 - x - \sqrt{5 - x^2}}{\cos\dfrac{2x-7}{4} - \cos\dfrac{x-5}{4}} \geqslant 0.$$

4. На основании BC трапеции $ABCD$ взята точка E, лежащая на одной окружности с точками A, C и D. Другая окружность, проходящая через точки A, B и C, касается прямой CD. Найдите BC, если $AB = 12$ и $BE : EC = 4 : 5$. Найдите все возможные значения отношения радиуса первой окружности к радиусу второй при данных условиях.

5. Пусть X — сумма корней уравнения

$$a\cos x = \sqrt{2} + 2\cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$$

на промежутке $[0; 2\pi)$, а Y — сумма корней уравнения

$$a\cos 2y - 2\sin 2y = a - 3\sin y$$

на том же промежутке. Найдите все значения a, при которых

$$\operatorname{ctg}\frac{X-Y}{2} = \sqrt{3}.$$

6. Найдите объем тетраэдра $ABCD$ с ребрами $AB = 3$, $AC = 5$ и $BD = 7$, если расстояние между серединами M и N его ребер AB и CD равно 2, а прямая AB образует равные углы с прямыми AC, BD и MN.

Вариант 3 (факультет вычислительной математики и кибернетики, олимпиада, апрель 2005)

1. Решите неравенство

$$6\log_{2x} x + 2\log_{4\sqrt{x}}(2x) \geqslant 1.$$

2. Найдите все решения системы уравнений

$$\begin{cases} \sin 2(x+y) = 1, \\ xy = 9. \end{cases}$$

3. Найдите все пары целых x и y, удовлетворяющие равенству

$$4x^2 - 2xy + 2y^2 + y - 2x - 1 = 0.$$

4. На сторонах AB и BC треугольника ABC взяты точки M и N соответственно. Отрезки AN и CM пересекаются в точке L. Площади треугольников AML, CNL и ALC равны 1, 6 и 4 соответственно. Найдите площадь треугольника MBN.

5. Дана правильная четырехугольная пирамида $SABCD$ с вершиной S. Известно, что длина перпендикуляра, опущенного из основания H высоты пирамиды SH на грань SDC, равна $\sqrt{6}$, а угол наклона бокового ребра SB к плоскости основания равен $\dfrac{\pi}{3}$. Найдите радиус сферы, описанной около пирамиды $SABCD$.

6. Решите уравнение

$$12\cos 2x + 8|\sin x|\sqrt{3 + |\sin x| - 3\cos 2x} = 11.$$

Вариант 4 (факультет вычислительной математики и кибернетики)

1. Решите неравенство

$$\log_2\left(\frac{x^2+|x-3|+3}{x+1}\right)^2 - |\log_2 x - 2| > \log_2 x + 2.$$

2. Решите уравнение

$$\sqrt{\operatorname{ctg} x + 1} = -\sqrt{15}\sin x.$$

3. Последовательности $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$, $n = 1, 2, 3, \ldots$, являются арифметическими прогрессиями, $a_{11} = 32$, $b_{21} = 43$. Последовательность $\{c_n\}$ определяется равенствами $c_n = (-1)^n a_n + (-1)^n b_n$. Сумма первых сорока членов последовательности $\{c_n\}$ равна 100, а сумма первых ее двадцати трех членов равна -60. Найдите b_{40} и сумму первых ста членов арифметической прогрессии $\{a_n\}$.

4. На стороне AB выпуклого четырехугольника $ABCD$ выбрана точка M так, что $\angle AMD = \angle ADB$ и $\angle ACM = \angle ABC$. Утроенный квадрат отношения расстояния от точки A до прямой CD к расстоянию от точки C до прямой AD равен 2, $CD = 20$. Найдите радиус вписанной в треугольник ACD окружности.

5. Найдите все значения параметра a, принадлежащие отрезку $[0;\pi]$, при которых уравнение

$$\sin^5(3x+a) = \cos(\pi\cdot[x])$$

имеет на отрезке $[1;\pi]$ нечетное число решений. (Здесь $[x]$ — целая часть числа x, т.е. наибольшее целое число, удовлетворяющее неравенству $[x] \leqslant x$.)

6. На гранях ABC, ABD, ACD и BCD тетраэдра $ABCD$ выбраны соответственно точки K, L, M и N так, что $KL \,||\, CD$, $KM \,||\, BD$, $KN \,||\, AD$. Отношение объема тетраэдра $ABCD$ к объему тетраэдра $KLMN$ равно 64. Известно, что

$$2(AD\cdot KM + BD\cdot KN) = AD\cdot BD.$$

Найдите отношение площадей треугольников ABD и KMN.

Вариант 5 (физический факультет)

1. Решите уравнение

$$2\cos 2x \cos 7x - \cos 4x = 1.$$

2. Решите неравенство

$$\sqrt{5x - x^2 + 6} < \sqrt{6} - x.$$

3. Решите уравнение

$$5^{x\sqrt{12}} - 5\sqrt{3} \cdot 15^{x\sqrt{3}} + 4 \cdot 3^{1+x\sqrt{12}} = 0.$$

4. На окружности взяты последовательно точки P, Q, R и S, $PQ = PS$. Отрезки PR и QS пересекаются в точке T, $RQ = q$, $RS = s$, $RT = t$. Найдите PT.

5. Решите систему

$$\begin{cases} x + 4\sqrt{x - y} = y + 12, \\ |2(x+1) + y| + 2|2x + (y-1)| = 3. \end{cases}$$

6. Вершина M прямого угла $\triangle LMN$ лежит внутри окружности с центром O и радиусом 8, проходящей через концы гипотенузы LN, MH — высота $\triangle LMN$. На прямой LN взята точка K так, что $KH = OH$. Найдите MK.

7. Для каждого допустимого значения a решите неравенство

$$\log_{ax}\left(\frac{a}{2}\right)\log_{a^2-2}(a-1) < 0.$$

8. В правильной треугольной пирамиде $SKLM$ с вершиной S точка N — середина отрезка KL, $SN = \sqrt{17}$. Сфера, проходящая через точки L, M и N, касается ребра SK в точке P такой, что $KP : PS = 1 : 2$. Найдите высоту SH пирамиды $SKLM$.

Вариант 6 (химический факультет)

1. Решите уравнение

$$|2x+1| = |x+2|.$$

2. Решите неравенство

$$\sqrt{3} \cdot 4^x \leqslant \sqrt{2} \cdot 9^x.$$

3. Решите тригонометрическое уравнение

$$\operatorname{ctg} x = \operatorname{tg} 4x + \cos 5x.$$

4. Найдите число n сторон выпуклого n-угольника, если каждый его внутренний угол не менее 143° и не более 146°.

5. Найдите все пары целых чисел $(x; y)$, удовлетворяющих уравнению

$$\sqrt{2x-y-3} + \sqrt{2y-x+3} = 2\sqrt{3-x-y}.$$

6. При каких значениях параметра a уравнение

$$|x| + \left|\frac{x+1}{3x-1}\right| = a$$

имеет ровно три решения?