Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова

Вступительное испытание по математике 2004 года

Вариант 1 (механико-математический факультет, олимпиада «Абитуриент-2004», март)

1. Найдите сумму тангенсов всех $x \in (-\pi; \pi)$ таких, что

$$\sin 2x + 5\cos 2x = 3.$$

2. Решите неравенство

$$3^{\log_x(3x^2+2x-1)} \leqslant (x^2+x)^{\log_x 9}.$$

3. Найдите все возможные значения суммы убывающей арифметической прогрессии

$$a_1 = \frac{6m-m^2-9}{6m-m^2}, \quad a_2 = \frac{6m-m^2-12}{6m-m^2}, \quad \ldots, \quad a_n = \frac{-10}{6m-m^2},$$

где m — некоторое целое число.

4. В выпуклом четырехугольнике $KLMN$ диагонали KM и LN перпендикулярны сторонам MN и KL соответственно, а длина стороны KN равна $4\sqrt{3}$. На стороне KN расположена точка A так, что $\angle LAK = \angle MAN$. Известно, что $\angle MKN - \angle KNL = 15^\circ$. Найдите длину ломаной LAM и площадь четырехугольника $KLMN$, если $LA : AM = 1 : \sqrt{3}$.

5. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение

$$\operatorname{arctg}\big((3a-1)\sin^2 x - (3a^3-a^2+3a-1)\sin x + \operatorname{tg}(ax-a\pi)\big) - ax + a\pi = 0$$

имеет ровно три решения.

6. Дана сфера радиуса 1 с центром в точке O. Из точки A, лежащей вне сферы, проведены четыре луча. Первый луч пересекает поверхность сферы последовательно в точках B_1 и C_1, второй — в точках B_2 и C_2, третий — в точках B_3 и C_3, четвертый — в точках B_4 и C_4. Прямые B_1B_2 и C_1C_2 пересекаются в точке E, прямые B_3B_4 и C_3C_4 — в точке F. Найдите объем пирамиды $OAEF$, если $AO = 2$, $EO = FO = 3$, а угол между гранями AOE и AOF равен 30°.

Вариант 2 (механико-математический факультет)

1. Решите неравенство

$$\frac{\log_4(2-x)-\log_6(2-x)}{\log_6 x-\log_9 x} \leqslant \log_4 9.$$

2. Решите неравенство

$$\frac{(x^2+x+1)^2-2|x^3+x^2+x|-3x^2}{10x^2-17x-6} \geqslant 0.$$

3. Выпуклый многогранник $ABCDFE$ имеет пять граней: CDF, ABE, $BCFE$, $ADFE$ и $ABCD$. Ребро AB параллельно ребру CD. Точки K и L расположены соответственно на ребрах AD и BC так, что отрезок KL делит площадь грани $ABCD$ пополам. Точка M является серединой ребра EF и вершиной пирамиды $MABCD$, объем которой равен 6. Найдите объем пирамиды $EKLF$, если известно, что объем многогранника $ABCDFE$ равен 19.

4. Решите уравнение

$$\sqrt{-3\sin 2x} = -2\sin 2x - \sin x + \cos x - 1.$$

5. Дорога проходит последовательно через пункты A, B, C и D. Расстояние от A до B равно 24 км. Из A в D выехал с постоянной скоростью автомобиль. Одновременно с ним из B в D отправились с постоянными скоростями велосипедист и мотоциклист. Когда автомобиль догнал велосипедиста, мотоциклист обгонял их на 6 км. В пункте C автомобиль догнал мотоциклиста и, доехав до D, сразу поехал обратно в A, встретившись с велосипедистом во второй раз в C. Найдите расстояние между B и C, если известно, что время от начала движения до момента повторной встречи автомобиля и велосипедиста в два раза больше, чем время от начала движения до того момента, когда автомобиль впервые догнал велосипедиста.

5. В остроугольном треугольнике ABC высоты пересекаются в точке H, а медианы в точке O. Биссектриса угла A проходит через середину отрезка OH. Найдите площадь треугольника ABC, если $BC = 2$, а разность углов B и C равна 30°.

Вариант 3 (факультет вычислительной математики и кибернетики, олимпиада «Абитуриент-2004», апрель)

1. Четыре числа a_1, a_2, a_3 и a_4 образуют в указанном порядке геометрическую прогрессию. Если к ним прибавить 6, 7, 6 и 1 соответственно, то получатся числа, образующие в том же порядке арифметическую прогрессию. Найдите числа a_1, a_2, a_3 и a_4.

2. Решите неравенства

$$\frac{1}{x^2-5x+7} \leqslant 5x-x^2-5.$$

3. Найдите все целые n, при которых справедливо равенство

$$\frac{5n^2+4n+13}{n+1} = 11-8\sqrt{1-8n}.$$

4. Решите неравенство

$$9\log_2^2 x + 36 \leqslant 4\left(-8\cos^2\frac{\pi(47-8x)}{45} + 8\cos\frac{\pi(47-8x)}{45} + 7\right)\log_2 x.$$

5. В параллелограмме $ABCD$ угол между диагоналями AC и BD равен 30°. Известно отношение $AC : BD = 2 : \sqrt{3}$. Точка B_1 симметрична вершине B относительно прямой AC, а точка C_1 симметрична вершине C относительно прямой BD. Найдите отношение площадей треугольника AB_1C_1 и параллелограмма $ABCD$.

6. При всех значениях параметра a решите уравнение

$$|x-3| - (1-2a)x^2 + (3-4a)x + 6a - 4 = \sin(|x-3| + 6a - 4) - \sin\left((1-2a)x^2 - (3-4a)x\right).$$

Вариант 4 (факультет вычислительной математики и кибернетики)

1. Решите уравнение

$$\left(\sqrt{7-4\sqrt{3}}-3\cos\left(\operatorname{arctg}(2\sqrt{2})\right)+\frac{2}{\sqrt{3}+1}\right)x=2^{\log_{\sqrt{2}}3}-9.$$

2. Решите неравенство

$$\frac{x^2-4}{\sqrt{15+2x-x^2}}\geqslant |x|-2.$$

3. Решите уравнение

$$2\cos^2\left(\frac{\pi}{4}-4x\right)-\sin\left(3x-\frac{5\pi}{16}\right)=-1.$$

4. Окружность с центром в точке M касается сторон угла AOB в точках A и B. Вторая окружность с центром в точке N касается отрезка OA, луча BA и продолжения стороны угла OB за точку O. Известно, что $ON:OM=12:13$. Найдите отношение радиусов окружностей.

5. Для каждого значения параметра a найдите число решений уравнения

$$\frac{2}{16^x}-\frac{1}{8^x}-\frac{a+8}{4^x}+\frac{4-2a}{2^x}-a^2+4a+5=0.$$

6. В основании прямой призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ лежит равнобокая трапеция $ABCD$ $(AD\,||\,BC)$. Через точку B_1 проведена плоскость $\mathcal{P}$, пересекающая ребро AD в точке K, а ребро CD — в точке N. Прямые AA_1 и CC_1 эта плоскость пересекает в точках L и M соответственно. Известно, что $DN:DC=3:4$, $BC=DK$ и $KN>DN$. Объем многогранника $ABCNKLB_1M$ относится к объему призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ как $49:144$. Найдите отношение длины отрезка DK к длине отрезка AD.

Вариант 5 (физический факультет, олимпиада «Абитуриент-2004», март)

1. Решите уравнение

$$6\sin\left(x+\frac{\pi}{8}\right)\cos\frac{3\pi}{8}-3\cos x-1=0.$$

2. Решите систему неравенств

$$-2<\frac{2}{x^2-x-2}<-1.$$

3. Решите неравенство

$$\log_{32}(x^2+3x+2)^5+\log_2(x^2-3x+2)<2.$$

4. Окружность с центром O вписана в $\triangle ABC$, $AB=4$, $BC=5$, $AC=6$. Прямые AO, BO и CO пересекают стороны BC, AC и AB в точках K, L и M соответственно. Найдите отношение площади $\triangle BMK$ к площади $\triangle CKL$.

5. Решите систему уравнений

$$\begin{cases}|2^x-2^y|+2^x+3\cdot 2^y=12\sqrt{2},\\ |2^x+2^{-y}|+2^x-33\cdot 2^{-y}=0.\end{cases}$$

6. В треугольнике ABC даны стороны $AB=5$, $BC=6$, $AC=7$. Три окружности попарно касаются друг друга внешним образом в точках A, B и C. Найдите радиус наибольшей окружности.

7. Для каждого значения параметра a решите уравнение

$$\log_2^2\left(\frac{x-3a}{x}\right)+4\left(\log_4(x-3a)\right)\log_2 x-8\log_4^2 x=0.$$

8. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ ($AA_1\,||\,BB_1\,||\,CC_1$) $AA_1:AB=4:3$. На боковых ребрах AA_1, BB_1 и CC_1 взяты точки K, L и M соответственно так, что $AK:KA_1=3:1$, $BL=LB_1$, $CM:MC_1=1:3$. Найдите двугранный угол между плоскостями KLM и ABC.

Вариант 6 (физический факультет)

1. Решите уравнение

$$\sin x \sin 4x + \sin 5x \sin 2x - \cos 3x = 0.$$

2. Решите неравенство

$$\frac{|x-1|}{1-\dfrac{6}{|x-1|}} < -1.$$

3. Решите неравенство

$$\log_2\big((2-2x-x^2)(x+2)\big) - \log_8\big((4+4x+x^2)(8x+16)\big) + 1 > 0.$$

4. В окружности радиусом 4 через точку D диаметра BC ($BD : DC = 5 : 3$) проведена хорда EF, перпендикулярная к этому диаметру. Найдите радиус окружности, касающейся отрезков BD, DF и дуги BF.

5. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 3\cdot 2^{x-2y} - \sqrt{2x-2y} = 24 - x, \\ 2^{x-2y} + 2\sqrt{2x-2y} = 2x + 8. \end{cases}$$

6. В трапеции $BCDE$ ($CD \,||\, BE$) $BC \perp BE$, $CD = 10$, $BE = 14$, LN — средняя линия (точка L — на стороне BC). Прямая, проходящая через точку B и перпендикулярная к стороне DE, пересекает отрезок LN в точке M, $LM : MN = 2 : 1$. Найдите площадь трапеции $BCDE$.

7. При каких значениях параметра a уравнение

$$(1 + \sin(3ax))\sqrt{5\pi x - x^2} = 0$$

имеет ровно 5 различных корней?

8. В правильной треугольной пирамиде $SLMN$ с вершиной S проведена медиана MP треугольника SMN и даны $LM = 2$, $SL = 6$. Через середину K ребра SM проведена прямая KE, параллельная ребру LN. Через точку L проведена прямая, пересекающая прямые MP и KE в точках A и B соответственно. Найдите длину отрезка AB.