Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова

Вступительное испытание по математике 2001 года

Вариант 1 (механико-математический факультет, олимпиада «Абитуриент-2001», март)

1. Решите уравнение

$$3x-2|x-2| = 3\sqrt{3x+18} - 2|\sqrt{3x+18}-2|.$$

2. Решите неравенство

$$\frac{\log_{(21+4x-x^2)}(7-x)}{\log_{(x+3)}(21+4x-x^2)} < \frac{1}{4}.$$

3. В трапеции $ABCD$ с боковой стороной $CD = 30$ диагонали пересекаются в точке E, а углы AED и BCD равны. Окружность радиуса 17, проходящая через точки C, D и E, пересекает основание AD в точке F и касается прямой BF. Найдите высоту трапеции и ее основания.

4. Можно ли подобрать числа A, B, φ, ψ так, чтобы выражение

$$\left(\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)+2\right)^2 + A\cos(x+\varphi) + B\sin(2x+\psi)$$

принимало при всех x одно и то же значение C? Если да, то какие значения может принимать константа C?

5. Основанием прямой призмы $ABCA'B'C'$ с высотой $\frac{4}{7}$ служит треугольник ABC, в котором $AB = BC = 1$ и $AC = \frac{3}{7}$. Через точку пересечения диагоналей $ACC'A'$ на расстоянии $\frac{4}{13}$ от точки A проводится плоскость, делящая объем призмы пополам. Какова наибольшая площадь сечения призмы такой плоскостью?

6. Найдите все значения a, при которых система

$$\begin{cases} (a-1)x^2+2ax+a+4 \leqslant 0, \\ ax^2+2(a+1)x+a+1 \geqslant 0. \end{cases}$$

имеет единственное решение.

Вариант 2 (механико-математический факультет, июль)

1. Решите неравенство

$$x \geqslant \log_2(101 \cdot 10^x - 10^{2+2x}) - \log_5(101 \cdot 2^x - 5^{2+x} \cdot 2^{2+2x}).$$

2. Имеет ли уравнение

$$12\cos\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) = |4 - 5\cos x|$$

хотя бы одну пару корней, расстояние между которыми не превосходит $\dfrac{\pi}{2}$?

3. Через вершины A, B, C параллелограмма $ABCD$ со сторонами $AB = 3$ и $BC = 5$ проведена окружность, пересекающая прямую BD в точке E, причем $BE = 9$. Найдите диагональ BD.

4. Найдите все трехзначные натуральные числа, каждое из которых больше суммы квадратов своих цифр на 517.

5. Найдите все числа, которые не могут быть корнями уравнения

$$4\sqrt{2x^4 + x^3} = a\sqrt[4]{4 - a^4}(x + 4x^2 - 8)$$

ни при каком значении параметра a.

6. Основание $ABCD$ прямоугольного параллелепипеда $ABCDA'B'C'D'$ повернули в плоскости ABC на угол 30° вокруг точки пересечения диагоналей AC и BD (вершина A повернулась в направлении вершины D), а боковые грани заменили гранями $AA'B$, $A'B'B$, $BB'C$, $B'C'C$, $CC'D$, $C'D'D$, $DD'A$ и $D'A'A$. Найдите все значения, которые могут принимать периметр и площадь сечения полученного многогранника плоскостью, параллельной плоскости ABC, если периметр прямоугольника $ABCD$ равен 26, а его площадь равна 42.

Вариант 3 (факультет вычислительной математики и кибернетики, олимпиада «Абитуриент-2001», апрель)

1. Сумма первых трех членов арифметической прогрессии равна 27, а сумма первых пяти членов равна 80. Сумма какого числа первых членов прогрессии равна 486?

2. Найдите все решения системы уравнений

$$\begin{cases} 3\sin x + \cos y = 0, \\ 6\cos x - 2\sin y = 7. \end{cases}$$

3. Из пункта A в пункт B выехал первый велосипедист. Одновременно с ним с такой же скоростью из B в A выехал второй велосипедист. Через некоторое время первый велосипедист увеличил скорость на 10 км/ч. Если бы первый велосипедист сразу двигался с увеличенной скоростью, то его встреча со вторым велосипедистом состоялась бы на три часа раньше. Известно, что расстояние между A и B равно 180 км, в момент изменения скорости первым велосипедистом расстояние между ним и вторым велосипедистом было меньше 70 км, на весь путь из A в B первый велосипедист затратил 15 ч. Найдите первоначальную скорость велосипедистов.

4. В параллелограмме $ABCD$ диагонали пересекаются в точке O, длина диагонали BD равна 12. Расстояние между центрами окружностей, описанных около треугольников AOD и COD, равно 16. Радиус окружности, описанной около треугольника AOB, равен 5. Найдите площадь параллелограмма $ABCD$.

5. Для каждого значения параметра a решите неравенство

$$3a - 1 - (8a-5)3^{-2\sqrt{-\log_{81}(x^2+6x+9)}} \leqslant 3(a+2)|x+3|^{2\sqrt{\log_{|x+3|} 1/9}}.$$

6. Сфера касается всех боковых ребер правильной шестиугольной пирамиды $SABCDEF$, причем ребер SA и SB она касается в точках K и L соответственно. Точки K, L и S лежат по одну сторону от плоскости, которая касается сферы в точке M, принадлежащей грани SAB, и пересекает ребра SA и SB в точках G и H соответственно. Прямые KM и LM делят апофему грани SAB на три равных отрезка. Известно, что $AB = 9$ и $GH = 3\sqrt{11}$. Найдите объем пирамиды $SABCDEF$ и радиус сферы.

Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова

Вступительное испытание по математике 2001 года

Вариант 4 (факультет вычислительной математики и кибернетики, июль)

1. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 2 \cdot 5^{1-y} = \log_3(x^{-2}), \\ 5^y + \log_3 x = 4. \end{cases}$$

2. Сумма первых четырех членов арифметической прогрессии равна 56. Все члены этой прогрессии — натуральные числа. Двенадцатый член больше 67, но меньше 74. Найдите двадцатый член этой прогрессии.

3. Среди всех решений системы

$$\begin{cases} y + 3x \leqslant -3, \\ x^2 + y^2 + 4x + 2y \leqslant 11 \end{cases}$$

найдите такое, при котором выражение $x^2 + y^2 - 6x - 8y + 25$ принимает минимальное значение.

4. Решите уравнение

$$\cos\left(\pi(x + 7\sqrt{x})\right)\sin\left(\frac{\pi}{2}(4x + \sqrt{x})\right) = 1.$$

5. Трапеция с основанием $\sqrt{8}$ и высотой $\sqrt{3} + \sqrt{2}$ вписана в окружность радиуса $\sqrt{5}$. Каждый из четырех отсекаемых сторонами трапеции сегментов отражен внутрь трапеции симметрично относительно отсекающей его стороны. Найдите площадь фигуры, состоящей из тех точек трапеции, которые не принадлежат ни одному из отраженных внутрь нее сегментов.

6. Функция $f(x)$ определена, возрастает и отрицательна на всей числовой прямой. Решите неравенство

$$\left(2f\left(x^2 - 2x - 112\right) + \left|f\left(x^2 - 2x - 112\right) - 3f\left(-2x\sqrt{32 - 2x}\right)\right|\right) :$$
$$: \left(3f\left(-2x\sqrt{32 - 2x} - 112\right) - 2f\left(-2x\sqrt{32 - 2x}\right)\right)^7 > 0.$$