Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова

Вступительное испытание по математике 2000 года

Вариант 1 (факультет вычислительной математики и кибернетики, письменный тур Двухтуровой олимпиады по математике)

1. Решить неравенство

$$\big||x^2 - 8x + 2| - x^2\big| \geqslant 2x + 2.$$

2. Решить уравнение

$$12^x + 6^x - 2 \cdot 4^x - 2 \cdot 3^x - 2^{x+1} + 4 = 0.$$

3. Найти все решения неравенства, принадлежащие отрезку $[-\pi, \pi]$:

$$\sqrt{6 - 10\cos x - \sin x} < \sin x - \cos x.$$

4. На стороне AB треугольника ABC выбрана точка D так, что $CD = \sqrt{13}$ и $\sin\angle ACD : \sin\angle BCD = 4 : 3$. Через середину отрезка CD проведена прямая, пересекающая стороны AC и BD в точках M и N соответственно. Известно, что $\angle ACB = 120^\circ$, площадь треугольника MCN равна $3\sqrt{3}$, а расстояние от точки M до прямой AB в два раза больше расстояния от точки N до этой же прямой. Найти площадь треугольника ABC.

5. Для каждого значения параметра a найти все решения системы уравнений:

$$\begin{cases} y^2 - 3y\log_2(4x^2 + (14a-10)x + 8a - 8) + 2\log_4^2(4x^2 + (6-2a)x + 4a^2 - 8a + 4)^2 = 0, \\ 5y^2 - 8y\log_4(4x^2 + (6-2a)x + 4a^2 - 8a + 4)^2 + 3\log_2^2(4x^2 + (14a-10)x + 8a - 8) = 0. \end{cases}$$

6. В основании пирамиды $SABC$ лежит треугольник ABC, у которого $AB = 15\sqrt{2}$, $BC = 20$, а радиус окружности, описанной около этого треугольника, равен $5\sqrt{5}$. На сторонах треугольника ABC как на диаметрах построены три сферы, пересекающиеся в точке O. Точка O является центром четвертой сферы, причем вершина пирамиды S является точкой касания этой сферы с некоторой плоскостью, параллельной плоскости основания ABC. Площадь части четвертой сферы, которая заключена внутри трехгранного угла, образованного лучами OA, OB и OC, равна 8π. Найти объем пирамиды $SABC$.

Вариант 2 (факультет вычислительной математики и кибернетики, устный экзамен)

1. Решить в целых числах уравнение $x^2 = 2(xy - y^2 - y)$.

2. Вычислить $\log_{\sqrt{2}+\sqrt{3}}(4\sqrt{2}+3\sqrt{3}) \cdot \log_{\sqrt{6}+1}(\sqrt{3}-\sqrt{2}) + \log_{2\sqrt{6}+7}(2\sqrt{6}+5)$.

3. Что больше: $\lg 7 \cdot \lg 13$ или 1?

4. Вычислить $\sin\alpha$, если известно, что $\sin(\frac{\alpha}{2}) + \cos(\frac{\alpha}{2}) = 1,4$.

5. Найти область значений функции $f(x) = \sin(\cos(\cos(x^2)))$.

6. Найти наибольшее значение выражения $\cos x + \cos y$ при условии, что $x + y = \frac{\pi}{2}$.

7. На координатной плоскости Oxy изобразить множество, координаты точек которого удовлетворят неравенству $\log_y |\sin x| \geqslant 0$.

8. Решить уравнение $\sqrt{\lg(-x)} = \lg\sqrt{x^2}$.

9. Решить уравнение $\sqrt{1-x^2} = 4x^3 - 3x$.

10. Решить уравенение $4 \cdot 33^{x+1} + 4 = 5 \cdot 29^x$.

11. Решить уравнение $x^3 + x^2 + x = -\frac{1}{3}$.

12. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x + y + z = 4, \\ 2xy - z^2 = 16. \end{cases}$$

13. Доказать, что для неотрицательных целых чисел a, b и c имеет место неравенство

$$\frac{a+b+c}{3} \leqslant \sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2}{3}}.$$

14. Наибольшей стороне $BC = a$ треугольника ABC принадлежит точка M. Найти наименьшее расстояние между центрами окружностей, описанных около треугольников ABM и ACM.

15. В равнобедренной трапеции средняя линия равна a, а диагонали взаимно перпендикулярны. Найти площадь трапеции.

16. В треугольнике даны две стороны a и b $(a > b)$. Найти третью сторону, если известно, что $a + h_a \leqslant b + h_b$, где h_a и h_b — высоты, опущенные на стороны a и b соответственно.

17. Пусть R, r и S соответственно радиусы описанной, вписанной окружностей и площадь прямоугольного треугольника. Известно, что $R+r = \sqrt{2S}$. Найти острые углы этого треугольника.

18. В окружность радиуса 1 вписан правильный четырнадцатиугольник. Найти сумму квадратов расстояний от произвольной точки окружности до всех вершин этого четырнадцатиугольника.

19. Дан параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$ ($AA_1 \parallel BB_1 \parallel CC_1 \parallel DD_1$). Найти, в каком отношении две плоскости, проходящие через точки A_1, B, D и B_1, C, D_1 соответственно, делят диагональ AC_1.

Вариант 3 (факультет вычислительной математики и кибернетики, основной экзамен)

1. Решить неравенство

$$\sin x \cdot \sin |x| \leqslant \frac{1}{2}.$$

2. Имеется некоторое количество раствора соли в воде. После испарения из раствора двух литров воды концентрация соли возросла на $\frac{1}{5}$, а после разведения получившегося раствора десятью литрами воды концентрация соли стала в два раза меньше первоначальной. Найти концентрацию соли в исходном растворе, считая массу 1 литра воды равной 1 кг.

3. Решить неравенство

$$\log_{16x-4x^2-7}(34x - 8x^2 - 21) \leqslant \log_{2x-1}(4x - 3).$$

4. В основании прямой призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ лежит ромб $ABCD$, у которого угол ABC равен $60°$. На боковых ребрах AA_1, BB_1 и CC_1 ($AA_1 \parallel BB_1 \parallel CC_1 \parallel DD_1$) расположены точки K, L и M соответственно. Известно, что угол между прямыми KL и AB равен $45°$, а угол между прямыми LM и BC — $30°$. Найти угол между плоскостью, проходящей через точки K, L и M и плоскостью основания $ABCD$.

5. Найти наибольшее значение выражения $14x^2+40x+y-324,5$ при условии, что $4x^2+20x+y \geqslant 162$ и $20x^2 - 80x + y \leqslant 8$.

6. Вершины A и C параллелограмма $ABCD$ лежат на одной окружности, а вершины B и D — на другой, пересекающей первую, причем центры окружностей лежат в плоскости параллелограмма. Расстояние между центрами окружностей равно 10. Длины диагоналей параллелограмма равны 26 и 6 соответственно. Найти расстояние от точки пересечения диагоналей параллелограмма до прямой, содержащей общую хорду окружностей.