Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова

Вступительное испытание по математике 1999 года

Вариант 1 (факультет вычислительной математики и кибернетики, письменный тур Двухтуровой олимпиады по математике)

1. Пункты A, B, C и D расположены на одной прямой в указанной последовательности. Пешеход выходит из пункта A со скоростью 5 км/час и направляется в пункт D. Достигнув пункта D, он поворачивает обратно и доходит до пункта B, затратив на всю дорогу 5 часов. Известно, что расстояние между A и C он прошел за 3 часа, а расстояния между A и B, B и C, C и D (в заданном порядке) образуют геометрическую прогрессию. Найти расстояние между B и C.

2. Решить неравенство:

$$\left(x+\frac{8}{x}\right)\cdot\left|\log_{\frac{2x-3}{2}}(x^2-4x+4)\right| \geqslant 9\cdot\left|\log_{\frac{2x-3}{2}}(x^2-4x+4)\right|.$$

3. Решить уравнение:

$$\sqrt{\frac{1+\sin(2x-\frac{\pi}{3})}{8}} = -\sin x\cdot\cos x.$$

4. На стороне BC треугольника ABC взята точка D такая, что $\angle CAD = 2\angle DAB$. Радиусы окружностей, вписанных в треугольники ADC и ADB, равны соответственно 8 и 4, а расстояние между точками касания этих окружностей с прямой BC равно $\sqrt{129}$. Найти AD.

5. При каких значениях параметра a уравнение имеет ровно два корня, лежащих на отрезке $[-4,0]$

$$3^{x^2+2ax+4a-3}-2=\left|\frac{a-2}{x+a}\right|.$$

6. В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ ($ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$ — основания, $AA_1 \parallel BB_1 \parallel CC_1 \parallel DD_1$) отрезки M_1N_1, M_2N_2, M_3N_3 — общие перпендикуляры к парам отрезков A_1C_1 и AB_1, BC_1 и AC, DC_1 и AD_1 соответственно. Объем параллелепипеда равен V, радиус описанной сферы равен R, а сумма ребер AA_1, AB и AD равна m. Найти сумму объемов пирамид $AA_1M_1N_1$, ABM_2N_2 и ADM_3N_3.

Вариант 2 (факультет вычислительной математики и кибернетики, устный экзамен)

1. Доказать, что число $n^3 - n + 3$ составное для любого натурального $n > 1$.

2. Целое число кратно 7 и при делении на 4 дает в остатке 3. Найти остаток от деления этого числа на 28.

3. Доказать, что если $a + b + c$ делится нацело на 6, то и $a^3 + b^3 + c^3$ делится нацело на 6 (a, b, c — целые числа).

4. Решить в целых числах уравнение $9x = 4y + 1$.

5. Сравнить числа a и b, если известно, что $5(a - 1) = a^2 + b$.

6. Имеет ли смысл выражение $\sqrt{\log_2 3 - \log_5 11}$?

7. Изобразить на плоскости геометрическое место точек, удовлетворяющих равенству

$$|y - x| + |y - x^2| = 2.$$

8. Построить график функии $y(x) = \arcsin|\sin x|$.

9. Решить уравнение $\sin x \cdot \sin 3x = 2\cos^2 x - \cos 2x$.

10. Решить уравнение $2^{\frac{1}{\sin^2 x}} + 2^{\frac{1}{\cos^2 x}} = \sin x + \cos x$.

11. При каких a уравнение $\sin x + \cos x + \sin x \cdot \cos x = a$ имеет решения?

12. Найти наибольшее и наименьшее значение функции $f(x) = \arcsin x \cdot \arccos x + 1$.

13. Решить неравенство $\log_2(\sqrt{x} + 1) \cdot \log_3(x + 2) \leqslant 1$.

14. В треугольнике все три высоты меньше 1. Доказать, что радиус вписанной окружности меньше $\dfrac{1}{3}$.

15. Доказать, что в любом треугольнике сумма длин всех трех медиан меньше периметра треугольника, но больше $\dfrac{3}{4}$ периметра треугольника.

16. В треугольнике ABC проведены высота CK и медиана CM. Известно, что $\angle ACK = \angle BCM$ и $\angle KCM \neq 0$. Найти величину угла ACB.

17. Построить параллелограмм по диагоналям и углу параллелограмма.

18. Построить треугольник по двум углам и биссектрисе третьего угла.

Вариант 3 (факультет вычислительной математики и кибернетики, основной экзамен)

1. Известно, что $\operatorname{tg}\alpha = \sqrt{3}$. Сравнить $\arccos\left(-\sqrt{-3\cos\alpha - 1}\right)$ и $\dfrac{19\pi}{24}$.

2. На координатной плоскости (x, y) проведена окружность радиуса 4 с центром в начале координат. Прямая, заданная уравнением $y = 4 - (2 - \sqrt{3})x$, пересекает ее в точках A и B. Найти сумму длин отрезка AB и меньшей дуги AB.

3. Решить неравенство:

$$\left|\log_{x+1}\sqrt{(x-2)^4} + 2\right| \geqslant -3 + \log_{\frac{1}{1+x}}\sqrt{(x-2)^6}.$$

4. В четырехугольной пирамиде $SABCD$ высоты боковых граней, опущенные из вершины пирамиды S, равны $\sqrt{2}$. Известно, что $AB = 2$, $BC = 6$, $\angle ABC = \frac{\pi}{3}$, $\angle ADC = \frac{2\pi}{3}$. Найти высоту пирамиды, если ее основание находится внутри четырехугольника $ABCD$.

5. Решить уравнение:

$$\operatorname{tg} 14x + 3\operatorname{ctg} 14x + \sin 6x - 2\sqrt{2}\sin\left(3x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{4}{\sqrt{3}+1}.$$

6. В остроугольном треугольнике ABC угол $ACB = 75^\circ$, а высота, опущенная из вершины этого угла, равна 1. Найти радиус описанной окружности, если известно, что периметр треугольника ABC равен $4 + \sqrt{6} - \sqrt{2}$.