Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова

Вступительное испытание по математике 1996 года

Вариант 1 (факультет вычислительной математики и кибернетики, пробный экзамен)

1. Решить неравенство

$$\sqrt{(2x+1)^4-(2x+1)^2}+(2x+1)^2 \geqslant 0.$$

2. Решить уравнение

$$\log_{2x+3}(x-2)^2 = \log_{\frac{x}{6}+\frac{1}{2}}(x-2)^2.$$

3. Решить уравнение

$$\sqrt{12\sin x - \frac{9}{2}\cos 2x + \frac{17}{2}} = \frac{9}{8} + 4\sin x + \frac{1}{2}\cos^2 x.$$

4. Через центр O вписанной в треугольник ABC окружности проведена прямая, параллельная стороне BC и пересекающая стороны AB и AC соответственно в точках M и N. Периметр треугольника AMN равен $3\sqrt[4]{2}$, длина стороны BC равна $\sqrt[4]{2}$, а длина отрезка AO в три раза больше радиуса вписанной в треугольник ABC окружности. Найти площадь треугольника ABC.

5. Найти все целочисленные решения уравнения

$$14x^4 - 5y^4 - 3x^2y^2 + 82y^2 - 125x^2 + 51 = 0.$$

6. Сфера с центром в точке O проходит через вершины A, B и C треугольной пирамиды $ABCD$ и пересекает прямые AD, BD и CD в точках K, L и M соответственно. Известно, что $AD = 10$, $BC : BD = 3 : 2$ и $AB : CD = 4\sqrt{3} : 11$. Проекциями точки O на плоскости ABD, BCD и CAD являются середины ребер AB, BC и AC соответственно. Расстояние между серединами ребер AB и CD равно 13. Найти периметр треугольника KLM.

Вариант 2 (факультет вычислительной математики и кибернетики, основной экзамен)

1. Числа a, b, c и d являются последовательными членами геометрической прогрессии. Известно, что $a + d = 10$, $a \cdot d = 7$. Найти $b^3 + c^3$.

2. Первый раствор содержит 20% азотной кислоты и 80% воды, второй — 60% азотной кислоты и 40% воды. Первая смесь была получена из 15 литров первого раствора и некоторого количества второго раствора. Смешав то же самое количество второго раствора с 5 литрами первого, получили вторую смесь. Сколько литров второго раствора было использовано для приготовления первой смеси, если известно, что процентное содержание воды во второй смеси в два раза больше процентного содержания кислоты в первой.

3. При всех значениях параметра a решить уравнение и указать, при каких a оно имеет единственное решение

$$25^x - (a-1)5^x + 2a + 3 = 0.$$

4. Решить неравенство

$$\arccos(3x) + \arcsin(x+1) \leqslant \frac{7\pi}{6}.$$

5. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 14x - 10y + 58 = 0, \\ \sqrt{x^2 + y^2 - 16x - 12y + 100} + \sqrt{x^2 + y^2 + 4x - 20y + 104} = 2\sqrt{29}. \end{cases}$$

6. Две окружности пересекаются в точках A и B. Хорда CD первой окружности имеет с хордой EF второй окружности общую точку M. Длина отрезка AB в три раза больше длины отрезка CM, которая, в свою очередь, в два раза меньше длины отрезка MD и в шесть раз меньше длины отрезка MF. Какие значения может принимать длина отрезка AM, если известно, что длина отрезка BM равна 2, а длина AB в девять раз больше длины отрезка EM?