

Вариант 1 (факультет вычислительной математики и кибернетики, пробный экзамен)

1. В арифметической прогрессии с отличной от нуля разностью сумма членов с четными номерами, не превосходящими 29, равна 168. Найти номер того члена прогрессии, который равен 12.

2. Решить уравнение

$$|\log_{6x}(x^2 - 7x + 12) - 1| = 1 - \log_{6x}(x^2 - 7x + 12).$$

3. Найти все корни уравнения  $4 \cdot 3^{\cos x} + 3^{-\cos x} = 4\sqrt{2}$ , удовлетворяющие неравенствам

$$-\frac{7\pi}{3} < x < -\frac{\pi}{3}.$$

4. Для каждого значения параметра  $a$  решить неравенство  $|\frac{1}{x} + 2a| \leq x$ .

5. Две окружности радиусов  $r$  и  $R$  с центрами в точках  $O_1$  и  $O$  касаются внутренним образом в точке  $K$ . В точке  $A$  окружности радиуса  $r$  проведена касательная, пересекающая окружность радиуса  $R$  в точках  $B$  и  $C$ . Известно, что  $AC : AB = p$  и отрезок  $AC$  пересекает отрезок  $OK$ .

Определить:

1) при каких условиях на  $r$ ,  $R$  и  $p$  возможна такая геометрическая конфигурация;

2) длину отрезка  $BC$ .

6. В кубе  $ABCD A' B' C' D'$  с параллельными гранями  $ABCD$  и  $A' B' C' D'$  длина ребра равна 8. Через точки  $M$ ,  $N$  и  $K$ , расположенные на ребрах  $BC$ ,  $CD$  и  $CC'$  соответственно, проведена плоскость. Известно, что длина высоты треугольника  $MCK$ , опущенной из вершины  $C$ , равна  $\frac{6}{\sqrt{13}}$ , величина угла  $MNK$  равна  $\arccos(\frac{3\sqrt{2}}{5})$ , произведение длин отрезков  $MN$  и  $KN$  равно  $30\sqrt{2}$  и площадь треугольника  $MNC$  меньше 7. Найти радиус сферы, касающейся плоскости треугольника  $MNK$  и трех граней куба с общей точкой  $A'$ .

Вариант 2 (факультет вычислительной математики и кибернетики, основной экзамен)

1. Найти все целые числа  $n$  и  $m$ , для которых  $3n^2 + 2nm = 11$  и  $n + 2m \geq 10$ .
2. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 5x + xy + 5y = 10 + 7\sqrt{3}, \\ x^2 + y^2 = 7. \end{cases}$$

3. Медианы  $BK$  и  $CL$  треугольника  $ABC$  пересекаются в точке  $M$  под прямым углом.  $AC = b$ ,  $AB = c$ . Найти площадь четырехугольника  $AKML$ .

4. Решить неравенство

$$\log_{2\sin x - 1}(43 - 4\sin x + 4\sin^2 x - x^2 + x) \leq \frac{3\log_3 2}{\log_3(2\sqrt{2})}.$$

5. Транспортное агенство осуществляет грузовые перевозки. Стоимость одного рейса при загрузке машины  $a$  тоннами груза складывается из эксплуатационных расходов  $p_2 a^2$  тыс. руб., оплаты труда водителя  $p_3$  тыс. руб. и прочих расходов  $p_1 a$  тыс. руб. Числа  $p_1, p_2, p_3$  являются соответственно первым, третьим и шестнадцатым членами некоторой арифметической прогрессии. Их сумма равна 340, а разность прогрессии  $d$  является корнем уравнения  $d^2 - 37d + 340 = 0$ . Агенство должно израсходовать 10000 тыс. руб. Если выполнено 12 одинаковых рейсов, то суммарная масса перевезенного груза больше 40 тонн. Сколько следует выполнить рейсов, чтобы масса перевезенного груза была максимальной?

6. В кубе  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  с параллельными гранями  $ABCD$  и  $A_1 B_1 C_1 D_1$  длина ребра равна 1. Точки  $K$  и  $N$  являются серединами ребер  $DC$  и  $BC$  соответственно. Точка  $M$  лежит на ребре  $CC_1$  и  $MC = \frac{2}{3}$ . Найти минимальное значение радиусов сфер, проходящих через точки  $M, N, K$  и касающихся плоскости  $BB_1 D_1 D$ .