Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова

Вступительное испытание по математике 1994 года

Вариант 1 (механико-математический факультет, пробный экзамен)

1. Число x удовлетворяет условиям

$$\operatorname{tg} 2x = -\frac{3}{4} \text{ и } \sin 2x > 0.$$

Обязательно ли при этих условиях определено выражение $\log_{\operatorname{tg}\frac{\pi}{6}} \operatorname{tg} x$ и чему оно тогда равно?

2. Решите уравнение

$$3\sqrt{x+4} = 5 - 2|x+2|.$$

3. В круге с радиусом 1 проведены хорды $AB = \sqrt{2}$ и $BC = \dfrac{10}{7}$. Найдите площадь части круга, лежащей внутри угла ABC, если угол BAC острый.

4. Найдите все значения x, при которых большее из чисел $3x - 4$ и $\log_2(5 \cdot 2^{2x-4} - 2^{x-1} + 1)$ положительно.

5. Найдите наибольшее значение объема пирамиды $SABC$ при следующих ограничениях:

$$SA \leqslant 4,\ SB \geqslant 7,\ SC \geqslant 9,\ AB = 5,\ BC \leqslant 6,\ AC \leqslant 8.$$

6. Найдите все значения параметра $\alpha \in \left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$, для каждого из которых уравнение

$$\sin 2x + \sin x + \sin(x - \alpha) = \sin \alpha + \sin(x + \alpha)$$

имеет ровно 5 различных корней на промежутке $\left[-\dfrac{7}{4}\pi, \dfrac{5}{4}\pi\right]$.

Вариант 2 (механико-математический факультет, основной экзамен)

1. Найдите все корни уравнения

$$\frac{4\sin x - 2\cos 2x - 1}{\cos 2x + \sqrt{3}\cos x - 2} = 0.$$

2. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 2^x + 2y = 1, \\ 3y - 6y^2 = 2^{x-1}. \end{cases}$$

3. Решите неравенство

$$\log_{(2-5x)} 3 + \frac{1}{\log_2(2-5x)} \leqslant \frac{1}{\log_6(6x^2 - 6x + 1)}.$$

4. В трапеции $ABCD$ с основаниями AD и BC диагонали AC и BD пересекаются в точке E. Вокруг треугольника EBC описана окружность, а касательная к этой окружности, проведенная в точке E, пересекает прямую AD в точке F таким образом, что точки A, D и F лежат последовательно на этой прямой. Известно, что $AF = a$, $AD = b$. Найдите EF.

5. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Сфера касается ребер AD, DD_1, CD и прямой BC_1. Найдите радиус сферы, если длины ребер куба равны 1.

6. При всех значениях параметра a решите уравнение

$$2x^2 + 2ax - a^2 = \sqrt{4x - 2a + 3a^2}.$$

Вариант 3 (факультет вычислительной математики и кибернетики, пробный экзамен)

1. Решите уравнение
$$\left(3|x+1|+\frac{1}{3}\right)^2 = 6(x+1)^2+\frac{10}{9}.$$

2. Вычислите $\cos 2\left(\beta+\frac{\pi}{4}\right)$, если $\operatorname{ctg}\beta = -\frac{\sqrt{5}}{2}$.

3. Решите неравенство
$$\sqrt{1+\left(\frac{1}{3}\right)^{-x-1}} \geqslant 5-9\cdot 3^{x-1}.$$

4. В остроугольном треугольнике EFG на высоте EM взята точка P, а на высоте GN — точка Q так, что углы FPG и EFQ — прямые. Известно, что $FQ=\sqrt{3}+1$, а $\angle PFQ = 15^\circ$. Найдите расстояние от точки P до прямой FQ.

5. Числа c_1, c_2, c_3, c_4, c_5 удовлетворяют соотношению
$$\log_3 c_k\cdot\log_3(c_{k-1}\cdot c_{k+1}) = \log_3 c_{k-1}\cdot\log_3 c_{k+1}\cdot\log_3(9c_k^2)$$
при $k=2$, 3, 4. Известно, что $c_1=3$, $c_5=3^{1/25}$. Найдите $\log_3(c_2^4-c_3^9+3c_4)$.

6. В треугольной пирамиде $PQRS$ ребра PR и QR перпендикулярны. На ребре PQ взята точка A так, что квадрат суммы расстояний от вершин P, Q, S до прямой AR равен удвоенной сумме квадратов длин ребер PR, QR, SR. Известно, что $PR=15$, $SR=17$, $\angle SRQ=60^\circ$. Найдите длину ребра SQ.

Вариант 4 (факультет вычислительной математики и кибернетики)

1. Решите уравнение

$$8\sin 5x + \cos 10x + 1 = 0.$$

2. Решите неравенство

$$|x-7| \leqslant 3 - \sqrt{x-4}.$$

3. Найдите все отрицательные значения v, при которых выполнено неравенство

$$\frac{1}{\log_5\left(\dfrac{\cos v}{5}\right)} - \frac{1}{\log_{5\cos v}\left(\dfrac{1}{5}\right)} \geqslant 0.$$

4. В треугольнике ABC длина стороны AB равна 18, длина биссектрисы AE равна $4\sqrt{15}$, а длина отрезка EC равна 5. Определите периметр треугольника ABC.

5. В начальный момент лечения пациенту была произведена первая инъекция 8 единиц некоторого лекарства, а во время каждой последующей инъекции ему вводится по 5 единиц того же лекарства. За время между инъекциями количество лекарства в организме уменьшается в 6 раз. Какое количество лекарства будет содержаться в организме пациента после 25-й инъекции?

6. Все высоты пирамиды $EFGH$, грани которой являются остроугольными треугольниками, равны между собой. Известно, что $FG = 17$, $HG = 14$, а $\angle EHG = 60^\circ$. Найдите длину ребра HF.

Вариант 5 (физический факультет, пробный экзамен)

1. Решите уравнение

$$\sin x \cdot \sin 3x = \frac{1}{2}.$$

2. Решите уравнение

$$\frac{1}{6}\log_2(x-2) - \frac{1}{3} = \log_{\frac{1}{8}} \sqrt{3x-5}.$$

3. Решите уравнение

$$5^{\sqrt{x}} - 5^{3-\sqrt{x}} = 20.$$

4. В прямоугольном треугольнике отношение радиуса вписанной окружности к радиусу описанной окружности равно $2:5$. Найдите острые углы треугольника.

5. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} |x-1| + |y-5| = 1, \\ y = 5 + |x-1|. \end{cases}$$

6. В треугольнике ABC медианы AD и CE взаимно перпендикулярны, $AB = c$, $BC = a$. Найдите AC.

7. При каких значениях a уравнение

$$2a(x+1)^2 - |x+1| + 1 = 0$$

имеет четыре различных решения?

8. Наклонная призма $ABCDA_1B_1C_1D_1$ имеет своими основаниями трапеции $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$. Сумма площадей параллельных боковых граней призмы равна S, а расстояние между этими гранями равно d. Найдите объем многогранника $BDA_1B_1C_1D_1$.

Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова

Вступительное испытание по математике 1994 года

Вариант 6 (физический факультет)

1. Решите неравенство

$$\frac{2x-1}{\log_2 x} < 0.$$

2. Решите уравнение

$$5\cos x + 2\sin x = 3.$$

3. Решите уравнение

$$5^{x-1} + 5\cdot(0,2)^{x-2} = 26.$$

4. В равнобедренном треугольнике высоты, опущенные на основание и на боковую сторону, равны соответственно m и n. Найдите стороны треугольника.

5. Решите уравнение

$$\log^2_{\frac{1}{2}}(4x) + \log_2\left(\frac{x^2}{8}\right) = 8.$$

6. В окружности пересекающиеся хорды AB и CD перпендикулярны, $AD = m$, $BC = n$. Найдите диаметр окружности.

7. Для каких значений a система неравенств

$$\begin{cases} -x^2 + 12x - a \geqslant 0, \\ x \leqslant 2. \end{cases}$$

выполняется хотя бы при одном значении x?

8. В правильной треугольной пирамиде $SABC$ (S — вершина) угол между боковым ребром и плоскостью основания равен α, сторона основания равна a, SH — высота пирамиды. Найдите площадь сечения пирамиды плоскостью, проходящей через точку H параллельно ребрам SA и BC.