Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова

Вступительное испытание по математике 1993 года

Вариант 1 (механико-математический факультет, пробный экзамен — май 1993 г.)

1. Решите неравенство

$$\left(\sqrt[3]{7}\right)^{35x} > \frac{1}{7}7^{|4x^2-12x-1|}.$$

2. Сумма первых 7 членов геометрической прогрессии равна ее первому члену, умноженному на 7, а сумма первого, восьмого и пятнадцатого членов равна 15. Найдите сумму первых 21 членов этой прогрессии.

3. В равнобокой трапеции диагональ имеет длину 8 и является биссектрисой одного из углов. Может ли одно из оснований этой трапеции быть меньше 4, если другое равно 5?

4. При каких значениях a, принадлежащих интервалу $(-\pi/2;\ \pi/2)$, уравнение

$$\sqrt{2\sin(x-a)+\sqrt{3}} = \cos 6x - 1$$

имеет решения?

5. На диагоналях AB' и BC' граней параллелепипеда $ABCDA'B'C'D'$ взяты точки M и N так, что отрезки MN и $A'C$ параллельны. Найдите отношение длин этих отрезков.

6. Найдите все значения a, для которых неравенство

$$\log_5\left(a\cos 2x + (1+a^2-\sin^2 x)\cos x + 4 + a\right) \leqslant 1$$

выполняется при всех x.

Вариант 2 (механико-математический факультет, основной экзамен)

1. Решите неравенство

$$\frac{\sqrt[3]{7}}{\log_{x-1} 17} \geqslant \frac{\log_{17}(x-1)}{\log_{291} 17}.$$

2. Найдите все значения b, при которых уравнение

$$9^x + (b^2+6)3^x - b^2 + 16 = 0$$

не имеет решения.

3. Решите систему

$$\begin{cases} (\sin y - \cos x + 1)\left(\operatorname{tg}^2\left(x+\dfrac{\pi}{6}\right) + \operatorname{tg}^2\left(y+\dfrac{2\pi}{3}\right)\right) = 0, \\ (\cos x + \sin y)(2 + \sin 2y + \cos y) = 0. \end{cases}$$

4. В треугольнике PQR медиана, проведенная из вершины Q, имеет длину $3\sqrt{21}/4$. Окружности с центрами в вершинах P и R и радиусами 5 и 1 соответственно касаются друг друга, а вершина Q лежит на прямой, касающейся каждой из окружностей. Найдите площадь S треугольника PQR, если известно, что $S < 7$.

5. Точки P, Q, R и S расположены в пространстве так, что середины отрезков SQ и PR лежат на сфере радиусом a, а отрезки PS, PQ, QR и SR делятся сферой на три части в отношении $1:2:1$ каждый. Найдите расстояние от точки P до прямой QR.

6. Из пункта A в пункт B с постоянными скоростями выехали два мотоциклиста, а из B в A одновременно с ними выехал третий мотоциклист с постоянной скоростью 80 км/ч. Через 40 минут расстояние между первым и вторым было в два раза меньше, чем между первым и третьим. Через 1 час после старта расстояние между первым и вторым было равно расстоянию между первым и третьим, а также было равно половине расстояния, которое осталось проехать третьему до A. Через 1 час 20 минут после старта расстояние между первым и вторым было равно $2/5$ расстояния между первым и третьим. Найдите расстояние между пунктами A и B.

Вариант 3 (факультет вычислительной математики и кибернетики)

1. Решите неравенство

$$\log_{\sqrt{8-2\sqrt{7}}+1-\sqrt{3}}(4x-x^2-2)\geqslant 0.$$

2. На отрезке $0\leqslant x\leqslant\pi$ найдите все значения x, удовлетворяющие уравнению

$$\sqrt{3}\cos x-\sin x=\sqrt{1+2\cos^2 x-\sqrt{3}\sin 2x}.$$

3. Решите неравенство

$$|3^x-4|+\left|x^2-4x+3\right|\leqslant 3^x+4x-x^2-7.$$

4. В равнобедренном треугольнике ABC с основанием AC точка D делит сторону BC в отношении $2:1$, считая от вершины B, а точка E — середина стороны AB. Известно, что медиана CQ треугольника CED равна $\sqrt{23}/2$, и $DE=\sqrt{23}/2$. Найдите радиус окружности, описанной около треугольника ABC.

5. Точка $M(x;y)$, декартовы координаты которой удовлетворяют условиям

$$a^2x-y=2a^2-2b,\qquad x-by=2-2a^2,$$

лежит на прямой $y=2-x$. При каких a и b эта точка наиболее близко расположена к точке $N(3;-1)$?

6. Найдите все значения a, при которых область определения функции

$$y=\frac{1}{3\cos x-2\cos^3 x-\sqrt{2}a}$$

совпадает с областью определения функции

$$y=\frac{1}{\sin^3 x+\cos^3 x-a}-\frac{\sqrt{2}}{3\cos x-2\cos^3 x-\sqrt{2}a}.$$

Вариант 4 (физический факультет, пробный экзамен — май 1993 г.)

1. Решите неравенство

$$x^3 < x.$$

2. Решите уравнение

$$8\sin^2\frac{x}{2} + 3\sin x - 4 = 0.$$

3. Решите уравнение

$$2^{x+1} = 2^{2x-4} \cdot 3^{x-3}.$$

4. В трапеции средняя линия, равная 20, делит площадь трапеции в отношении 3 : 5. Найдите основания трапеции.

5. Найдите область определения функции

$$y = \sqrt{\log_{1/2}\frac{x-1}{3x-5}}.$$

6. В равнобедренном треугольнике ABC ($AB = BC$) проведена биссектриса AD. Известно, что $BC/DC = k$. Найдите отношение длины отрезка DC к радиусу окружности, описанной около треугольника ADC.

7. Для любого a решите уравнение

$$2|x| + |x-1| = a.$$

8. В треугольной пирамиде $SABC$ все плоские углы при вершине S прямые, SO — высота пирамиды. Известно, что отношение площади треугольника AOB к площади треугольника BOC равно k. Найдите отношение площади треугольника ASB к площади треугольника BSC.

Вариант 5 (физический факультет, основной экзамен)

1. Решите неравенство

$$\frac{2x-1}{2^x-1} < 0.$$

2. Решите уравнение

$$\cos 5x = \cos(5+x).$$

3. Решите уравнение

$$\sqrt{\log_2 x} = 2\log_2 \sqrt{x} - 1.$$

4. В окружность с радиусом R вписан равнобедренный трегольник ABC ($AB = BC$) с углом BAC, равным α. Найдите радиус окружности, вписанной в треугольник ABC.

5. Решите неравенство

$$\frac{|x+3|+x}{x+2} > 1.$$

6. Окружность касается сторон угла с вершиной O в точках A и B. На этой окружности внутри треугольника AOB взята точка C. Расстояния от точки C до прямых OA и OB равны соответственно a и b. Найдите расстояние от точки C до хорды AB.

7. Число $x = 3$ — один из корней уравнения $ax^2+bx+2 = 0$, где $a < 0$. Найдите действительные корни уравнения $ax^4 + bx^2 + 2 = 0$.

8. На плоскости лежат два шара с радиусами r и цилиндр с радиусом R ($R > r$). Шары касаются друг друга и боковой поверхности цилиндра. Цилиндр касается плоскости по своей образующей. Найдите радиус шара, большего, чем данные, касающегося обоих данных шаров, цилиндра и плоскости.