Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова

Вступительное испытание по математике 1991 года

Вариант 1 (механико-математический факультет)

1. Решите уравнение

$$\sqrt{4\cos 2x - 2\sin 2x} = 2\cos x.$$

2. Решите неравенство

$$\frac{\log_3(1-\frac{3x}{2})}{\log_9(2x)} \geqslant 1.$$

3. Найдите площадь фигуры, заданной на координатной плоскости неравенствами

$$\begin{cases} x^2+y^2 \leqslant 4x-4y-6, \\ x \geqslant 1. \end{cases}$$

4. Из вершины тупого угла A треугольника ABC опущена высота AD. Из точки D радиусом, равным AD, опущена окружность, пересекающая стороны треугольника AB и AC в точках M и N соответственно. Вычислите длину стороны AC, если заданы длины отрезков $AB = c, AM = n$ и $AN = m$.

5. Найдите все пары чисел p и q, при которых неравенство

$$|x^2 + pq + q| > 2$$

не имеет решений на отрезке $[1; 5]$.

6. В основании призмы лежит равносторонний треугольник ABC со стороной $\sqrt{3}$. Боковые ребра AD, BE, CF перпендикулярны основанию. Сфера радиуса $7/2$ касается плоскости ABC и продолжений отрезков AE, BF, CD за точки A, B и C соответственно. Найдите длину боковых ребер призмы.

Вариант 2 (факультет вычислительной математики и кибернетики)

1. Решите уравнение

$$\sqrt{x+4}+x-2=0.$$

2. Найдите все решения уравнения

$$\operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{2}+\frac{\pi\sqrt{2}}{4}\sin x\right)=1.$$

3. Решите неравенство

$$49^{\log_x 5}-7^{\log_x 5}-2\geqslant 0.$$

4. Три круга с центрами в точках P, Q и R попарно касаются друг друга внешним образом в точках A, B и C. Известно, что величина угла PQR равна $2\arcsin\frac{1}{3}$, а сумма радиусов всех трех кругов равна $12\sqrt{2}$. Какую наибольшую длину может иметь окружность, проходящая через точки A, B и C?

5. Проверьте справедливость неравенства $y\leqslant 3,17$, где y — наименьшее на интервале $(0;1)$ значение функции

$$f(x)=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{(x+0,003)^{0,45}}+\frac{3}{(1-x)^{0,48}}\right)+\frac{1}{2}\left|\frac{1}{(x+0,003)^{0,45}}-\frac{3}{(1-x)^{0,48}}\right|.$$

6. Сфера радиуса R касается всех граней восьмигранника. Две грани — основания — расположены в плоскостях α и β, а остальные шесть граней — боковые грани — представляют собой или равные между собой трапеции, или равные между собой равнобедренные треугольники. Боковые грани таковы, что каждая боковая сторона треугольника является одновременно боковой стороной трапеции, а каждая боковая сторона трапеции является одновременно либо боковой стороной другой трапеции, либо боковой стороной одного из треугольников. Основания всех трапеций, имеющие длину $\sqrt{13}$, расположены в плоскости β и образуют многоугольник площади 12, а все другие основания трапеций и все основания треугольников расположены в плоскости α. Площадь поверхности сферы относится к суммарной площади боковых граней как π относится к 5. Известно, что $3<R<4$. Найдите R.

Вариант 3 (физический факультет)

1. Решите уравнение

$$8 - 7\sin 2x = 12\sin^2 x.$$

2. В конус вписан шар. Площадь поверхности шара равна площади основания конуса. Найдите угол между образующей конуса и плоскостью его основания.

3. Решите неравенство

$$\log_{49}(x+3) - \log_7(x+2) < 0.$$

4. В треугольнике ABC угол C — тупой, D — точка пересечения прямой DB, перпендикулярной к AB, и прямой DC, перпендикулярной к AC. Высота треугольника ADC, проведенная из вершины C, пересекает AB в точке M. Известно, что $AM = a$, $MB = b$. Найдите AC.

5. При каких значениях a все корни уравнения

$$3ax^2 + (3a^3 - 12a^2 - 1)x - a(a-4) = 0$$

удовлетворяют условию $|x| < 1$?

6. В основании пирамиды $TABCD$ лежит трапеция $ABCD (BC \| AD, AD/BC = 2)$. Через вершину T пирамиды проведена плоскость, параллельная прямой BC и пересекающая отрезок AB в точке M такой, что $AM/MB = 2$. Площадь получившегося сечения равна S, а расстояние от ребра BC до плоскости сечения равно d. Найдите

1) в каком отношении плоскость сечения делит объем пирамиды,

2) объем пирамиды.

Вариант 4 (химический факультет)

1. Найдите максимум и минимум функции

$$f(x) = \frac{3x+1}{(3x+1)^2+1}.$$

2. Решите неравенство

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{|x-1|} > \left(\frac{1}{4}\right)^{|x+1|}.$$

3. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{2x-1} + \sqrt{y+3} = 3, \\ 2xy - y + 6x - 3 = 4. \end{cases}$$

4. Решите уравнение

$$\cos^4 x = \frac{1}{4}\cos 2x + \frac{1}{2}\cos^2 x \cos 8x.$$

5. Две окружности разных радиусов в точке A одной и той же прямой и расположены по разные стороны от нее. Отрезок AB — диаметр меньшей окружности. Из точки B проведены две прямые, касающиеся большей окружности в точках M и N. Прямая, проходящая через точки M и A, пересекает меньшую окружность в точке K. Известно, что длина отрезка MK равна $\sqrt{2+\sqrt{3}}$, а угол BMA равен $15°$. Найдите площадь фигуры, ограниченной отрезками касательных BM, BN и той дугой MN большей окружности, которая не содержит точку A.