Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова

Вступительное испытание по математике 1990 года

Вариант 1 (механико-математический факультет)

1. В треугольнике ABC сторона BC равна 6, сторона AC равна 5, а угол при вершине B равен $30°$. Найдите площадь треугольника, если расстояние от вершины A до прямой BC меньше $1/\sqrt{2}$.

2. Решите уравнение

$$2^{|x-2|\sin x} = (\sqrt{2})^{x|\sin x|}.$$

3. Решите неравенство

$$\frac{\sqrt{1-x^3}-1}{1+x} \leqslant x.$$

4. Найдите все значения параметра a, при которых уравнение

$$x^2 - 2a\sin(\cos x) + a^2 = 0$$

имеет единственное решение.

5. Найдите все тройки целых чисел x, y, z, удовлетворяющих неравенству

$$\log_2(2x+3y-6z+3) + \log_2(3x-5y+2z-2) + \log_2(2y+4z-5x+2) > z^2 - 9z + 17.$$

6. В основании пирамиды $SABC$ лежит прямоугольный треугольник ABC со стороной $2\sqrt{3}$; $SA = SB = SC = \sqrt{7}$. В трехгранный угол при вершине C вписана сфера S_1. Сфера S_2, радиус которой втрое больше, чем у сферы S_1, касается сферы S_1, плоскостей SAC и ABC. При этом отрезок прямой SB, заключенный внутри сферы S_2, имеет длину $6/\sqrt{7}$. Найдите радиус сферы S_2.

Вариант 2 (факультет вычислительной математики и кибернетики)

1. Решите неравенство

$$\log_{x^2+4} 8 < 1.$$

2. Числа a_1, a_2, $\ldots$, a_{21} образуют арифметическую прогрессию. Известно, что сумма членов этой прогрессии с нечетными номерами на 15 больше суммы членов с четными номерами. Найдите a_{12}, если $a_{20} = 3a_9$.

3. Решите уравнение

$$3 \cdot 64^{2\sin^2\left(x+\frac{\pi}{4}\right)} - 392 \cdot 8^{\sin 2x} + 16 = 0.$$

4. Решите неравенство

$$\sqrt{9v^2 - 48v - 21} + \sqrt{9v^2 - 51v - 15} \leqslant |3v - 6|.$$

5. Радиус вписанной в треугольник ABC окружности равен $\sqrt{15}/3$. Окружность радиусом $5\sqrt{5}/(3\sqrt{3})$ касается лучей, образующих угол ABC, и вписанной в треугольник ABC окружности. Найдите тангенс угла ABC, если площадь треугольника ABC равна $3\sqrt{15}$, а наибольшей из его сторон является сторона AC.

6. Найдите все значения параметра a, при которых для любых значений параметра b неравенство

$$\left|\log_6\left(\frac{x}{36}\right) + \left(\frac{10a+3b+31}{5}\right)x^2 - 9b^2 - 9b - 1\right| \leqslant \log_6\left(\frac{36}{x}\right) + \left(\frac{10a+3b+41}{5}\right)x^2 - (6b+2)x + 9b^2 + 15b + 3$$

имеет хотя бы одно решение.

Вариант 3 (физический факультет)

1. Решите уравнение

$$x^2 - 4|x| - 1 = 0.$$

2. В равнобедренной трапеции диагональ длины d образует угол α с основанием. Найдите площадь трапеции.

3. Решите уравнение

$$\cos x \cdot \cos 3x = \cos 2x.$$

4. В треугольнике ABC $\angle BAC = \alpha$, $\angle ABC = \beta$, $BC = a$, AD — высота. На стороне AB взята точка P так, что $AP/PB = 1/2$. Через точку P проведена окружность, касающаяся стороны BC в точке D. Найдите радиус этой окружности.

5. Определите, при каких a уравнение $\log_{\sqrt{2-x}} \sqrt{2x+a} = 2$ имеет решение, и найдите эти решения.

6. В правильной треугольной пирамиде $SABC$ отрезок AD — высота основания ABC. Конус с вершиной A и образующей AD касается своей боковой поверхностью основания ABC и боковых граней ASC и ASB пирамиды. Известно, что $AD/SD = m$. Найдите

1) отношение площади боковой поверхности конуса к площади основания пирамиды;

2) в каких границах может изменяться это отношение при изменении m;

3) при каких m конус не имеет точек, находящихся вне пирамиды.