

Вариант 1 (механико-математический факультет)

1. Решите уравнение

$$4|\cos x| + 3 = 4\sin^2 x.$$

2. Решите неравенство

$$\frac{\sqrt{2 - x^2 + 2x} + x - 2}{\log_3 \left(\frac{5}{2} - x \right) + \log_3 2} \leq 0.$$

3. Стороны KN и LM трапеции $KLMN$ параллельны, причем $KN = 3$, а угол M равен 120° . Прямые LM и MN являются касательными к окружности, описанной около треугольника KLN . Найдите площадь треугольника KLN .

4. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \log_x y + \log_y x = \frac{5}{2}, \\ 4\sqrt{x} - 3\sqrt{y} = 1. \end{cases}$$

5. Отрезок PQ параллелен плоскости, в которой лежит прямоугольник $KLMN$, причем $KL = 1$, $PQ = 3$. Все стороны прямоугольника $KLMN$ и отрезки KP , LP , NQ , MQ , PQ касаются некоторого шара. Найдите объем этого шара.

6. Найдите наименьшее из значений x , для которых существуют числа y , z , удовлетворяющие уравнению

$$x^2 + 2y^2 + z^2 + xy - xz - yz = 1.$$

Вариант 2 (факультет вычислительной математики и кибернетики)

1. Можно ли разместить равносторонний треугольник со стороной 3 внутри круга радиусом $\sqrt[4]{10}$?

2. Решите уравнение

$$8\sqrt{12 + 16x - 16x^2} + 4x - 4x^2 = 33.$$

3. Из пункта A в пункт B вышел пешеход. Вслед за ним через 2 часа из пункта A выехал велосипедист, а еще через 30 минут — мотоциклист. Пешеход, велосипедист и мотоциклист двигались равномерно и без остановок. Через некоторое время после выезда мотоциклиста оказалось, что все трое преодолели одинаковую часть пути от A до B . На сколько минут раньше пешехода в пункт B прибыл велосипедист, если пешеход прибыл в пункт B на 1 час позже мотоциклиста?

4. Решите неравенство

$$1 \leq |\cos x|^{\sqrt{2x-3} \cdot \log_{|\cos x|} \left(\frac{1+2\sqrt{3}|\sin x|}{8(1-2\cos^2 x)} \right)}.$$

5. Найдите все значения параметра a , при которых уравнение

$$\log_{\frac{1}{\pi}} \left(\frac{a^2 + 4\pi^2 + 4}{4x - x^2 - 2(a - 2\pi)|x - 2| + 4\pi a} \right) - \sqrt{(x - 5a + 10\pi - 34) \cdot (|\pi - x| - a + \pi + 2)} = 0$$

имеет по крайней мере одно целочисленное решение.

6. В пирамиде $SABC$ основание H высоты SH лежит на медиане CM основания ABC . Точка O , являющаяся серединой высоты SH , находится на одинаковом расстоянии от точки S , точки E , лежащей на ребре SA , и точки F , лежащей на ребре SB . Известно, что $SH = 8$, $AB = 16\sqrt{2}$, $EF = 8\sqrt{\frac{2}{5}}$, угол SMC не больше 30° , а расстояние между серединами ребер AB и SC равно $4\sqrt{13}$. Найдите радиус сферы, вписанной в пирамиду $SABC$.

Вариант 3 (физический факультет)

1. Решите уравнение

$$\sin 5x - \sin x = \sqrt{8} \cos 3x.$$

2. В остроугольном треугольнике площади S известны величины α и β углов A и B . Найдите длину высоты, опущенной на сторону, прилежащую к углам A и B .

3. Решите уравнение

$$\log_2(x + 4) + 2 \log_2 \sqrt{x} = 5.$$

4. В правильной четырехугольной пирамиде отношение бокового ребра к высоте пирамиды равно 2. Найдите отношение радиуса вписанного в пирамиду шара к апофеме пирамиды.

5. При каких значениях m уравнение

$$(2x)^2 - 4x(m3^m)^{\frac{1}{2}} + 3^{m+1} + m - 3 = 0$$

имеет корни, и каковы знаки корней при различных значениях m ?

6. Две окружности радиусов R и r пересекаются в точках A и B и касаются прямой в точках C и D , N — точка пересечения прямых AB и CD (B между A и N). Найдите:

- 1) радиус окружности, описанной около треугольника ACD ,
- 2) отношение высот треугольников NAC и NAD , опущенных из вершины N .