

Вариант 1 (механико-математический факультет)

1. Решите уравнение

$$\log_2(x^2 - 3) - \log_2(6x - 10) + 1 = 0.$$

2. Выпуклый четырехугольник $ABCD$ описан вокруг окружности с центром в точке O , при этом $|AO| = |OC| = 1$, $|BO| = |OD| = 2$. Найдите периметр четырехугольника $ABCD$.

3. Решите уравнение

$$\sqrt{5 \sin x + \cos 2x} + 2 \cos x = 0.$$

4. Найдите все значения x , для которых выражение

$$\sqrt{3x^4 - 2 - x^8} \cdot \sin(\pi(2x + 16x^2))$$

имеет смысл и не обращается в ноль.

5. Дана треугольная пирамида $ABCD$ с вершиной D , грани которой ABD и ACD — прямоугольные треугольники, ребро AD перпендикулярно медиане основания AK и $|AD| = |AK|$. Сечением пирамиды плоскостью, не проходящей через середины ребер AD и BC , является равнобокая трапеция $EFGH$ с основаниями EF и GH , причем точка E делит ребро BD пополам, а точка G лежит на ребре AC и $|AG| = 3|GC|$. Найдите отношение площади трапеции $EFGH$ к площади грани BCD .

Вариант 2 (механико-математический факультет)

1. Решите уравнение

$$\log_x(2x^2 - 3x - 4) = 2.$$

2. В трапеции $ABCD$, вписанной в окружность радиуса $r = 2$, диагональ AC является биссектрисой угла BAD , а длина основания AD в два раза больше длины основания BC . Найдите площадь этой трапеции.

3. Решите уравнение

$$\sqrt{2 \sin x \cdot \sin 2x} = \sqrt{5 \cos x + 4 \sin 2x}.$$

4. Найдите все значения x , для которых выражение

$$\sqrt{4x^4 - 3 - x^8} \cdot (1 - \cos(2\pi(2x + 21x^2)))$$

имеет смысл и не обращается в ноль.

5. В четырехугольной пирамиде $ABCDE$ основание $ABCD$ — параллелограмм, а грани ADE и BCE — прямоугольные треугольники. Ребро BC перпендикулярно медиане EP грани CDE и $|BC| = |EP|$. Сечением пирамиды плоскостью является равнобокая трапеция $GHKL$, вершины которой G, H, K, L лежат, соответственно, на ребрах AE, BE, CE, DE , причем $|GE| = 3|GA|$ и $|CH| = |EH|$. Найдите отношение площади трапеции $GHKL$ к площади грани ABE .

Вариант 3 (факультет вычислительной математики и кибернетики)

1. Какое из чисел больше: $\sqrt{8}$ или $2^{(2\log_2 5 + \log_{1/2} 9)}$?
2. Найдите все x , для которых функция

$$y = 6 \cos^2 x + 6 \sin x - 2$$

принимает наибольшее значение на \mathbb{R} .

3. Решите неравенство

$$\frac{\sqrt{2-x} + 4x - 3}{x} \geq 2.$$

4. На заводе было несколько одинаковых прессов, штампующих детали, и завод выпускал 6480 деталей в день. После реконструкции все прессы заменили на более производительные, но также одинаковые, а их количество увеличилось на три. Завод стал выпускать в день 11200 деталей. Сколько прессов было первоначально?

5. При всех a решите уравнение

$$|x + 3| - a|x - 1| = 4$$

и определите, при каких a оно имеет ровно два решения.

6. Около треугольника ABC описана окружность с центром в точке O . Касательная к окружности в точке C пересекается с прямой, делящей пополам угол B треугольника, в точке K , причем угол BKC равен половине разности утроенного угла A и угла C . Сумма длин сторон AC и AB равна $2 + \sqrt{3}$, а сумма расстояний от точки O до сторон AC и AB равна 2. Найдите радиус окружности.

Вариант 4 (физический факультет)

1. Решите уравнение

$$\frac{1}{2} \cos \frac{x}{2} + \sqrt{2} \cos \frac{x}{4} = 0.$$

2. Для каких значений a решение уравнения

$$10x - 15a = 13 - 5ax + 2a$$

больше 2?

3. Известно, что $\log_b a = \sqrt{3}$. Вычислите

$$\log_{\left(\frac{\sqrt{a}}{b}\right)} \left(\frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt{b}}\right).$$

4. Решите неравенство

$$5^x - 3^{x+1} > 2(5^{x-1} - 3^{x-2}).$$

5. На боковом ребре SA правильной треугольной пирамиды $SABC$ с вершиной S взята точка D , через которую проведено сечение пирамиды, пересекающее апофемы граней SAC и SAB в точках M и N . Известно, что прямые DM и DN образуют с плоскостью основания пирамиды углы величиной β , а величины углов DMS и DNS равны α ($\alpha < \frac{\pi}{2}$). Найдите величину угла MDN .

6. Прямая, проходящая через центры вписанной и описанной окружностей треугольника, перпендикулярна одной из его биссектрис. Известно, что отношение расстояния между центрами вписанной и описанной окружностей к радиусу описанной окружности равно h . Найдите углы треугольника.