

Вариант 1 (механико-математический факультет)

1. Найти все числа $a > 0$, для которых

$$\int_0^a (2 - 4x + 3x^2) dx \leq a.$$

2. Длины боковых сторон трапеции равны 3 и 5. Известно, что в трапецию можно вписать окружность, касающуюся всех ее сторон. Средняя линия трапеции делит трапецию на две части, отношение площадей которых равно 5 : 11. Найти длины оснований трапеции.

3. Доказать, что для функции $f(x) = (\cos x) (\sin 2x)$

$$\min_{x \in [-\pi, \pi]} f(x) > -\frac{7}{9}.$$

4. Найти все решения системы уравнений

$$\begin{cases} y^3 - 9x^2 + 27x - 27 = 0, \\ z^3 - 9y^2 + 27y - 27 = 0, \\ x^3 - 9z^2 + 27z - 27 = 0. \end{cases}$$

5. Основанием пирамиды $SABC$ является равносторонний треугольник ABC , длина стороны которого равна $4\sqrt{2}$. Боковое ребро SC перпендикулярно к плоскости основания и имеет длину 2. Найти величину угла и расстояние между скрещивающимися прямыми, одна из которых проходит через точку S и середину ребра BC , а другая проходит через точку C и середину AB .