Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова

Вступительное испытание по математике 1976 года

Вариант 1 (факультет вычислительной математики и кибернетики)

1. Даны: параллелограмм со сторонами, равными $\sqrt{19}$ и $\sqrt{2}/6$, и углом $45°$ между ними и квадрат со стороной, равной $3\sqrt{2}/5$. Определить, что больше: площадь параллелограмма или площадь квадрата.

2. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 7^y \cdot \log_5 x = -2, \\ 4 \cdot 7^y + \log_5 x = 2. \end{cases}$$

3. Решить уравнение

$$\sqrt{2 + \operatorname{ctg} x - \sin^2 x} - \sqrt{\frac{4}{17} - \sin^2 x} = \sqrt{\frac{30}{17} + \operatorname{ctg} x}.$$

4. На плоскости даны две пересекающиеся окружности. Первая имеет центр в точке N_1 и радиус, равный $5\sqrt{2}$; вторая — центр в точке N_2 и радиус, равный 8. Отрезок N_1N_2 пересекает обе окружности, а величина угла FN_2N_1, где F — одна из точек пересечения окружностей, равна $45°$. Вершина L прямоугольного треугольника KLM является точкой пересечения первой окружности и отрезка N_1N_2, а сторона KM — хордой второй окружности, перпендикулярной к прямой, проходящей через точки N_1 и N_2. Найти стороны треугольника KLM, если известно, что $|KL| > 8$.

5. Найти все положительные числа a, для которых существует бесконечно много чисел x и y, одновременно удовлетворяющих следующим условиям:

$$18x^2 + \frac{3}{2}(1-a)(x^3+9x) - \frac{1}{8}a(x^2+9)^2 \leqslant 0, \quad \frac{6x}{x^2+9} = \frac{1}{9y} + \frac{ay}{3} + \frac{a}{6}, \quad y > 0.$$

Вариант 2 (механико-математический факультет)

1. Решить уравнение

$$\log_{5\ln(-x)}\left(\sin\frac{x}{2}+\sin\frac{3x}{2}\right)=1.$$

2. Решить неравенство

$$\frac{7}{9^x-2}\geqslant\frac{2}{3^x-1}.$$

3. В треугольнике ABC ($\widehat{C}=90^\circ$, $\widehat{B}=30^\circ$, $|CA|=1$) проведена медиана CD. Кроме того, из точки D под углом 15° к гипотенузе проведена прямая, пересекающая отрезок BC в точке F. Найти площадь треугольника CDF. Указать ее приближенное значение в виде десятичной дроби с точностью до $0,01$.

4. Три шара, среди которых имеются два одинаковых, касаются плоскости P и, кроме того, попарно касаются друг друга. Вершина прямого кругового конуса принадлежит плоскости P, а ось конуса перпендикулярна к этой плоскости. Все три шара лежат вне конуса, причем каждый из них касается некоторой образующей конуса. Найти косинус угла между образующей конуса и плоскостью P, если известно, что в треугольнике с вершинами в точках касания шаров с плоскостью P величина одного из углов равна 150°.

5. Числа r, s, t таковы, что $r<s<t$. Кроме того, известно, что после подстановки каждого из трех чисел r, s, t вместо y в равенство

$$x^2-(9-y)x+y^2-9y+15=0$$

по меньшей мере одно из двух оставшихся чисел будет содержаться среди корней получившегося квадратного уравнения. Доказать, что $-1<r<1$.

Вариант 3 (физический факультет)

1. Решить уравнение

$$1 - 2\sqrt{2}\cos^3 3x + \cos 6x = 0.$$

2. Решить неравенство

$$\log_{\sqrt{3}}(4 - x) < 4 + 2\log_3(x + 3).$$

3. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 2^{\frac{x-2y}{2}} + 2^{\frac{x-2y}{4}} = 20, \\ 2^{\frac{x}{2}} + 4^{-\frac{y}{2}} = 10. \end{cases}$$

4. В треугольнике KLM, все стороны которого различны, биссектриса угла KLM пересекает сторону KM в точке N. Через точку N проведена прямая, пересекающая сторону LM в точке A такой, что $|MN| = |AM|$. Известно, что $|LN| = a$, $|KL| + |KN| = b$. Найти длину отрезка AL.

5. Все плоские углы трехгранного угла $SPQR$ (S — вершина) — прямые. На грани PQS взята точка A на расстоянии 12 от ребра QS и на расстоянии 5 от ребра PS. Из некоторой точки T, расположенной внутри трехгранного угла $SPQR$, в точку A направлен луч света. Он образует угол $\pi/4$ с ребром RS и угол $\pi/3$ с ребром PS. Луч зеркально отражается от граней угла $SPQR$ сначала в точке A, затем в точке B, затем — в точке C. Найти длину отрезка BC.