

Вариант 1 (факультет вычислительной математики и кибернетики)

1. Решить неравенство

$$\sqrt{x^2 + 4x - 5} - 2x + 3 > 0.$$

2. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \sin(2x + \sin^2 y) = 0, \\ x - 3 \sin^2 y = -2. \end{cases}$$

3. Дана прямоугольная трапеция. Известно, что некоторая прямая, параллельная основаниям, пересекает ее на две трапеции, в каждую из которых можно вписать окружность. Определить основания исходной трапеции, если ее боковые стороны равны  $c$  и  $d$ , причем  $c < d$ .

4. Два грузовика доставили со склада на стройку одно и то же количество кирпича и одно и то же количество цемента, причем каждый из них сначала доставлял кирпич, а затем цемент, перевозя за каждую поездку груз одного и того же веса. Первый грузовик начал работу на 40 минут раньше, а закончил на 40 минут позже второго. При этом интервал времени между окончаниями доставки кирпича грузовиками был не более 20 минут.

Если бы первый грузовик начал работу на 1 час 5 минут раньше второго, уменьшив свою производительность на 10%, а производительность второго грузовика не изменилась, то второй грузовик закончил бы работу на 55 минут раньше первого, а интервал времени между окончаниями доставки кирпича грузовиками был бы не менее 25 минут.

Если бы производительность первого грузовика уменьшилась на 2 тонны в час, а производительность второго грузовика не изменилась, то первый грузовик затратил бы на выполнение всей работы в два раза больше времени, чем второй грузовик на доставку кирпича.

Сколько всего цемента было доставлено на стройку?

5. Дана треугольная пирамида  $ABCD$ . Скрещивающиеся ребра  $AC$  и  $BD$  и  $AD$  и  $BC$  этой пирамиды перпендикулярны, ребра  $AB$  и  $CD$  равны, все ребра пирамиды касаются шара радиуса  $r$ . Найти площадь грани  $ABC$ .

Вариант 2 (механико-математический факультет)

1. Решить неравенство

$$\log_{\frac{1}{3}}(x^2 + 4x + 6) + 6\sqrt{\log_3(x^2 + 4x + 6)} \geq 8.$$

2. Найти все пары чисел  $(x, y)$ , удовлетворяющие условию  $y \geq 0$  и системе уравнений

$$\begin{cases} 4x^2 - (y + 1)^2 - 32 = 31 \cdot 2^{x^2 + (y+1)^2}, \\ \cos(\pi \cdot (x^2 + y^2)) = 1. \end{cases}$$

3. Два равных ромба  $ABCD$  ( $AB \parallel CD$ ,  $AD \parallel BC$ ) и  $APQR$  ( $AP \parallel QR$ ,  $AR \parallel PQ$ ) имеют общую вершину  $A$  и лежат в одной плоскости. Известно, что  $\angle BAD = \angle PAR = \alpha < \frac{\pi}{2}$ , точка  $R$  лежит внутри ромба  $ABCD$  и угол  $RAD$  равен  $\beta$ . Стороны  $BC$  и  $QR$  пересекаются в точке  $K$ . Найти величину угла  $BAK$ .

4. В правильную треугольную пирамиду  $SABC$  с вершиной  $S$  и основанием  $ABC$  вписан шар единичного радиуса; двугранный угол между основанием пирамиды и боковой гранью равен  $60^\circ$ . Доказать, что существует единственная плоскость, пересекающая ребра основания  $AB$  и  $BC$  в некоторых точках  $M$  и  $N$  таких, что  $MN = 5$ , касающаяся шара в точке, удаленной на равные расстояния от точек  $M$  и  $N$ , пересекающая продолжение высоты пирамиды  $SK$  за точку  $K$  в некоторой точке  $D$ . Найти длину отрезка  $SD$ .

5. Без помощи таблиц найти все значения  $x$  в промежутке  $-4 < x < -2,5$ , удовлетворяющие равенству

$$\log_{\frac{1}{5}} \left( \sin x - \cos 6x + \frac{2}{3} \right) = \log_{\frac{1}{5}} \left( \sin 3x - \cos 8x + \frac{2}{3} \right).$$