Вариант 1 (факультет вычислительной математики и кибернетики)

1. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \sin y \cos x + \sin x = 0, \\ 2\cos^2 y + \sin y \sin x = \cos 2y \cos x. \end{cases}$$

2. Решить неравенство

$$\log_{2x-\frac{4}{25}}\left(\frac{x^2-14x+51}{50}\right) \leqslant 0.$$

3. В прямоугольном треугольнике ACB из вершины прямого угла C проведены биссектриса $CL = a$ и медиана $CM = b$. Найти площадь треугольника ACB.

4. Точки A, B, C, D, E, F лежат на поверхности шара радиуса $\sqrt{2}$. Отрезки AD, BE и CF пересекаются в одной точке S, которая находится на расстоянии 1 от центра шара. Известно, что объемы пирамид $SABC$ и $SDEF$ относятся как $1 : 9$, объемы пирамид $SABF$ и $SDEC$ относятся как $4 : 9$, а объемы пирамид $SAEC$ и $SDBF$ относятся как $9 : 4$. Найти длины отрезков SA, SB, SC.

5. Из пункта A одновременно стартуют три бегуна и через некоторое время одновременно финишируют в том же пункте, пробежав по маршруту, состоящему из прямолинейных отрезков AB, BC, CA, образующих треугольник ABC. На каждом из указанных отрезков скорости бегунов постоянны и равны у первого бегуна 10 км/ч, 16 км/ч и 14 км/ч соответственно, а у второго бегуна 12 км/ч, 10 км/ч и 16 км/ч соответственно. Третий бегун в пунктах B и C оказывался не один и менял скорость на всем маршруте лишь один раз. Треугольник ABC — остроугольный или тупоугольный?

Вариант 2 (механико-математический факультет)

1. Решить уравнение
$$2(\cos x)^{\frac{5}{2}} - \cos 2x = 1 + \frac{\sin x}{\sqrt{3}}(1 - \sqrt{\cos x}).$$

2. В трапеции $ABCD$ точка K — середина основания AB, точка M — середина основания CD. Найти площадь трапеции, если известно, что DK есть биссектриса угла D трапеции, BM есть биссектриса угла B трапеции, наибольший из углов при нижнем основании трапеции равен 60°, а ее периметр равен 30.

3. Решить неравенство
$$5x + \sqrt{6x^2 + x^3 - x^4}\log_2 x > (x^2 - x)\log_2 x + 5 + 5\sqrt{6 + x - x^2}.$$

4. Точки K и M являются соответственно серединами ребер AB и AC треугольной пирамиды $ABCD$, площадь основания ABC которой равна p. Найти площадь грани BDC, если сечение MDK имеет площадь q, а основание высоты пирамиды попадает в точку пересечения медиан треугольника ABC.

5. Найти все пары чисел (x, y), удовлетворяющие условиям
$$\begin{cases} \sqrt{2x^2y^2 - x^4y^4} = y^6 + x^2(1 - x), \\ \sqrt{1 + (x + y)^2} + x(2y^3 + x^2) \leqslant 0 \end{cases}$$

Вариант 3 (механико-математический факультет)

1. Решить уравнение

$$1+\cos 2x+\cos^2 x\log_{\sqrt{3}}\operatorname{tg}^2 x+3\sin x=2\sin x\log_{\frac{1}{3}}\operatorname{tg}^3 x.$$

2. В трапеции $ADCD$ точки K и M являются соответственно серединами оснований AB и CD. Известно, что $AM\perp DR$ и $CK\perp BM$, а угол CDK равен 60°. Найти площадь трапеции, если ее высота равна 1.

3. Решить неравенство

$$\sqrt{2-5x-3x^2}+2x>2x\cdot 3^x\sqrt{2-5x-3x^2}+4x^2\cdot 3^x.$$

4. В треугольной пирамиде $ABCD$ через ребро AD, равное a и точку E — середину ребра BC — проведено сечение, образующее с гранями ACD и ABD соответственно углы α и β. Найти объем пирамиды, если площадь сечения ADE равна S.

5. Найти все пары чисел (x,y), удовлетворяющие условиям

$$\begin{cases}4y^2-3x^2=\sqrt{2(x+2y)^2-(x+2y)^4},\\ x^4+2\leqslant 4y(x^2-1).\end{cases}$$

Вариант 4 (физический факультет)

1. Решить уравнение

$$2\sin x + \cos 2x = 1.$$

2. Решить уравнение

$$\left(\frac{1}{4}\right)^{3x} - \left(\frac{1}{8}\right)^{x-1} - 128 = 0.$$

3. Сумма первых пяти членов геометрической прогрессии равна 62. Известно, что пятый, восьмой и одиннадцатый члены этой прогрессии являются соответственно первым, вторым и десятым членами арифметической прогрессии. Найти первый член геометрической прогрессии.

4. Прямой круговой конус с вершиной S вписан в треугольную пирамиду $SPQR$ так, что окружность основания конуса вписана в основание PQR пирамиды. Известно, что $\measuredangle PSR = \pi/2, \measuredangle SQR = \pi/4, \measuredangle PSQ = 7\pi/12$. Найти отношение площади боковой поверхности конуса к площади боковой основания PQR пирамиды.

5. Дан круг с центром O. Через точку внутри круга проведены диаметр AB и хорда CD. Из точки D опущен перпендикуляр DF на хорду AC (F — между A и C), а из точки F опущен перпендикуляр FH на AB. Точка M — середина хорды CD. Известно, что $AM = 2MO, 8AH = 5AB$. Найти $\measuredangle AMO$.