Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова

Вступительное испытание по математике 1972 года

Вариант 1 (факультет вычислительной математики и кибернетики)

1. Решить уравнение

$$9^{1-(x+2)^2} - 2 \cdot 3^{2-(x+2)^2} + 7 = 0.$$

2. Решить неравенство

$$\frac{1}{\sin^2 x} - 1 \geqslant \frac{|\operatorname{ctg} x - 1| + 1}{\operatorname{tg} x}.$$

3. В прямоугольном секторе AOB из точки B, как из центра, проведена дуга OC (C — точка пересечения этой дуги с дугой AB) радиуса BO. Окружность S_1 касается дуги AB, дуги OC и прямой OA, а окружность S_2 касается дуги OC, прямой OA и окружности S_1. Найти отношение радиуса окружности S_1 к радиусу окружности S_2.

4. Боковые ребра правильной треугольной пирамиды $SABC$ с вершиной S наклонены к плоскости основания ABC под углом 45°. Шар касается плоскости основания ABC в точке A и, кроме того, касается продолжения ребра BS за вершину S. Через центр шара и высоту BD основания проведена плоскость. Найти угол наклона этой плоскости к плоскости основания.

5. Найти все действительные значения параметра α, при которых неравенство имеет и притом конечное число решений. Для каждого такого α указать все решения неравенства

$$\operatorname{tg}^2(\cos\sqrt{4\pi^2 - x^2}) - 4\alpha \operatorname{tg}(\cos\sqrt{4\pi^2 - x^2}) + 2\alpha \leqslant 0.$$

Вариант 2 (факультет вычислительной математики и кибернетики)

1. Решить уравнение

$$4^{1-(x-2)^2} - 2^{3-(x-2)^2} + 1 = 0.$$

2. Решить неравенство

$$1 + \cos 2x \geqslant \cos x(1 + |1 - 2\cos x|).$$

3. В прямоугольном секторе AOB проведена хорда AB. Окружность S_1 с центром на биссектрисе сектора касается хорды AB и дуги AB. Окружность S_2 касается хорды AB, дуги AB и окружности S_1. Окружность S_3, отличная от S_1, касается хорды AB, дуги AB и окружности S_2. Найти отношение радиуса окружности S_2 к радиусу окружности S_3.

4. Шар касается плоскости основания $ABCD$ правильной четырехугольной пирамиды $SABCD$ в точке A и, кроме того, касается ребра SC. Через центр этого шара и сторону основания BC проведена секущая плоскость. Найти угол наклона этой плоскости к плоскости основания, если плоскость сечения перпендикулярна грани ASD.

5. Найти все действительные значения параметра α, при которых неравенство имеет и притом конечное число решений. Для каждого такого α указать все решения неравенства

$$\sqrt{2\pi - |x|}(\operatorname{ctg}^2(\sin x) - 2\alpha \operatorname{ctg}(\sin x) - \alpha) \leqslant 0.$$

Вариант 3 (механико-математический факультет)

1. Найти все значения x, при которых справедливо неравенство

$$\frac{\log_8 x}{\log_2(1+2x)} \leqslant \frac{\log_2 \sqrt[3]{1+2x}}{\log_2 x}.$$

2. Пункты A и B соединены двумя дорогами, одна из которых на 3 км короче другой. Из B в A по более короткой дороге вышел пешеход, и одновременно из A по той же дороге выехал велосипедист.

Пешеход и велосипедист одновременно прибыли в A через 2 часа после начала движения. За это время пешеход прошел один раз путь от B до A, а велосипедист проехал два раза в одном направлении по кольцевому маршруту, образованному двумя названными дорогами. Найти скорости пешехода и велосипедиста, если известно, что их вторая встреча произошла на расстоянии 3,5 км от пункта B (скорости постоянны).

3. В треугольнике ABC известны стороны $AB = 20$ м, $AC = 24$ м. Известно, что вершина C, центр вписанного в треугольник ABC круга и точка пересечения биссектрисы угла A со стороной BC лежат на окружности, центр которой лежит на стороне AC. Найти радиус описанной около треугольника окружности.

4. В треугольной пирамиде $SABC$ боковое ребро SC равно ребру AB и наклонено к плоскости основания ABC под углом $60°$. Известно, что вершины A, B, C и середины боковых ребер пирамиды расположены на сфере радиуса 1 м. Доказать, что центр указанной сферы лежит на ребре AB, и найти высоту пирамиды.

5. Даны три уравнения с действительными коэффициентами:

a) $x^2 + ax + ac = 0$,

b) $x^2 - bx + c^3 = 0$,

c) $x^4 - bx^2 + c^3 = 0$.

Каждое из них имеет по крайней мере один действительный корень. Известно, что корни первого уравнения больше единицы. Известно также, что все корни первого уравнения являются корнями третьего уравнения и хотя бы один корень первого уравнения удовлетворяет второму уравнению. Найти числа a, b, c, если $b > 3$.

Вариант 4 (механико-математический факультет)

1. Найти все значения x, при которых справедливо неравенство

$$(\log_9 x)^2 \geqslant \left(\log_3 \sqrt{1-\frac{x}{4}}\right)^2.$$

2. Из пункта A кольцевого шоссе одновременно в одном направлении выехали автомобиль и мотоцикл, каждый с постоянной скоростью. Автомобиль без остановок дважды проехал по всему шоссе в одном направлении. В момент, когда автомобиль догнал мотоциклиста, мотоциклист повернул обратно, увеличил скорость на 16 км/ч и через 22,5 минуты после разворота одновременно с автомобилем прибыл в пункт A. Найти длину всего пути мотоцикла, если этот путь на 5,25 км короче длины всего шоссе.

3. В треугольнике ABC угол C — тупой. Биссектриса BE угла B делит сторону AC на отрезки $AE = 3$ м и $EC = 2$ м. Известно, что точка K, лежащая на продолжении стороны BC за вершину C, является центром окружности, проходящей через точки C, E и точку пересечения биссектрисы угла B с биссектрисой угла ACK. Определить расстояние от точки E до стороны AB.

4. В треугольной пирамиде $SABC$ известны плоские углы при вершине S: $\angle BCD = 90°$, $\angle ASC = \angle ASB = 60°$. Вершины A, S и середины ребер SB, SC, AB, AC лежат на поверхности шара радиуса 3 м. Доказать, что ребро SA является диаметром этого шара и найти объем пирамиды.

5. Даны три уравнения с действительными коэффициентами:

a) $x^2 + ax + ac = 0$,

b) $x^2 - bx + c^3 = 0$,

c) $x^4 - bx^2 + c^3 = 0$.

Каждое из них имеет по крайней мере один действительный корень. Известно, что абсолютные величины корней первого уравнения больше единицы. Известно также, что все корни первого уравнения являются корнями третьего уравнения и хотя бы один корень первого уравнения удовлетворяет второму уравнению. Найти числа a, b, c.